УДК 517.977.5

ОБЛАСТИ ДОСТИЖИМОСТИ И ПРОЕКТИРУЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.А. Ушаков
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской Академии Наук (СПИИРАН)
Россия, 199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., 39
E-mail: mr.vitaly.ushakov@yandex.ru

Ключевые слова: оптимальное управление, область достижимости, проектирующие операторы, сложные динамические объекты, междисциплинарный подход, ортогональное проектирование, СДО, ТОУ, ОД, optimal control, reachability area, projection operator, complex dynamic objects, interdisciplinary approach, orthogonal projection, python.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы, связанные с оптимальным управлением. В частности, использование областей достижимости при решении задач теории оптимального управления сложными динамическими объектами. Анализируется использование областей достижимости при решении основных задач теории оптимального управления динамическими системами. Приводится описание основных фаз и этапов обобщенной процедуры выбора оптимальных программ управления структурной динамикой сложных динамических объектов. Анализируется возможность использования проектирующих операторов при ортогональном проектировании целевого множества на область достижимости. В данной статье поясняются значения ключевых терминов и даются основные формулы.

1. Введение

Фундаментальные основы общей теории оптимального управления (ТОУ) были заложены в 50-х годах XX века Л.С. Понтрягиным [1] и Р. Беллманом [2]. Но на сегодняшний день ТОУ [3] активно развивается, поэтому появляются новые методы (несмотря на то, что это сопряжено со значительными трудностями), области применения и находятся более простые (в вычислительном, временном планах …) решения, чем предложенные ранее. Поэтому сегодня этот раздел науки с большой скоростью интегрируется с другими разделами науки, такими как нейронные сети, искусственный интеллект, авиационно-космические и нанотехнологии и т.д. Вообще ТОУ при решении задач во многих областях, например, в механике полета (решение задачи оптимизации полета летательных аппаратов (ЛА)), в технике (совершенствование технологических процессов, режимов работы роботов), в энергетике (передача электроэнергии), в экономике (оптимальное функционирование микромоделей и макромоделей), в медицине (разработка необходимых программ лечения на основе математических моделей функционирования различных систем организма) и т.д.

ТОУ динамическими техническими системами (в том числе сложными техническими системами и объектами) [4] является наиболее разработанным направлением в кибернетике [5,6], в рамках которой были получены многочисленные знаменитые фундаментальные и прикладные научные результаты отечественными и зарубежными специалистами [7-9]. Хотя методы классической ТОУ сложными динамическими объектами (СДО) традиционно рассматриваются в теории автоматического управления. Это вызвано «бедностью» математического аппарата, связанного с СДО.

2. Области достижимости в задачах теории оптимального управления

Вначале рассмотрим использование областей достижимости (ОД) при решении основных задач ТОУ динамическими системами [10].

Ранее проведенные исследования показали, что при решении задач оценки возможностей управления, если известны ОД управляемой системы, то можно оценить возможности управления, заданным классом СДО. Так, можно найти ответ на вопрос, существует ли возможность доставить управляемую систему в требуемую точку (подобласть) фазового пространства в некоторый фиксированный момент времени. Заметим, что аналогичные задачи наиболее часто встречаются на практике, например, при оценке маневренных возможностей ЛА.

При решении задачи оценки возмущений и задачи о накоплении возмущений, если известны параметры ОД, то появляется возможность найти ответ на главный вопрос о точности приведения системы в конкретное состояние при наличии возмущений. Б.В. Булгаков впервые поставил и исследовал эту проблему, которую он назвал задачей о накоплении возмущений [11].

Задача оптимального управления – это задача со свободным правым концом, фиксированным временем и терминальным функционалом. Задачи оптимального управления указанного класса являются объектом исследования ТОУ, которая сформировалась в 80-е года XX века; в основе этой теории лежат принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана. В работах [12-14] показано, что знание ОД позволяет существенно упростить решение задач ТОУ. Т.о., знание ОД заменяет собой в этом случае всю необходимую для решения информацию о динамике системы: уравнения, ограничения и начальные условия.

Как видно из приведенных примеров типичных задач ТОУ динамическими системами, ОД играют в них весьма важную роль. И применительно к задачам, связанным с управлением системной динамикой, важнейшим этапом является определение потенциальных точек в пространстве системно-технических параметров, куда мы можем попасть, используя подход, предлагаемый в данной статье.

3. Описание основных фаз и этапов обобщенной процедуры выбора оптимальных программ управления структурной динамикой сложных динамических объектов

Предлагается использовать алгоритм для решения задач ТОУ СДО из [4].

Во время первого этапа осуществляется формирование допустимых вариантов многоструктурных макросостояний СДО или структурно-функциональный синтез нового облика СДО, соответствующего предполагаемой (требуемой) обстановке.

Во время второго этапа выполняется выбор подходящего варианта многоструктурного макросостояния СДО с параллельным синтезом адаптивных планов (программ) управления переходом СДО из текущего в требуемое (выбранное) макросостояние.

Рассмотрим подробнее основные шаги первого этапа [4,15]:

Шаг 1. Формирование, анализ и интерпретация исходных данных, которые используются для синтеза многоструктурных макросостояний СДО, построение или коррекция описания моделей, которые используются при структурно-функциональном синтезе облика СДО.

Шаг 2. Планирование процесса решения задачи синтеза многоструктурных макросостояний СДО.

Шаг 3. Построение и аппроксимация ОД динамической системы, с помощью которого неявно задаются варианты облика СДО (варианты многоструктурных макросостояний СДО).

Шаг 4. Ортогональное проектирование на ОД, с помощью которой задаются требования, предъявляемые к новому облику СДО.

Шаг 5. Формирование и интерпретация выходных результатов, представление их в удобном для последующего использования виде.

В рамках данной статьи остановимся подробнее на ортогональном проектировании (шаг 4). Анализ, выполненный в [4,15,16], показывает, что существует четыре варианта взаимного расположения целевого множества (ЦМ) (в виде выпуклой оболочки $\overline{E}$) и ОД $D\left(t, T_0, \vec{x}(T_0)\right)$ (рис. 1).

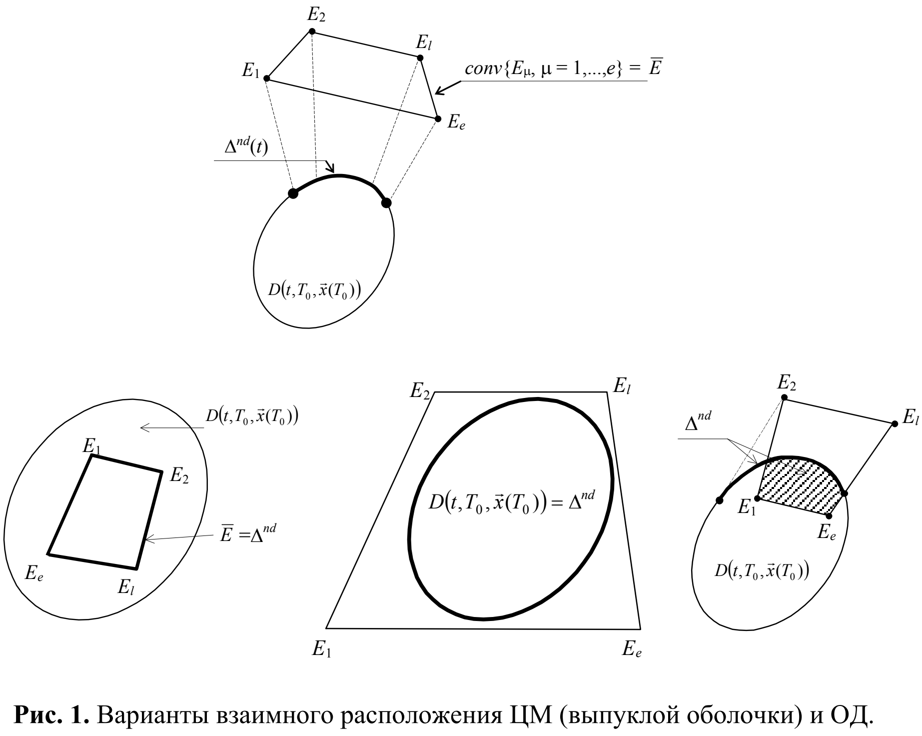

Рис. 1. Варианты взаимного расположения ЦМ (выпуклой оболочки) и ОД.

Вариант 1: $\bar{E} \cap D\left(t, T_0, \vec{x}(T_0)\right) = \emptyset$ (рис. 1 – верхний). Выпуклая оболочка $\bar{E}$, построена на точках E_μ ($\mu = 1,...,e$).

Вариант 2: $\bar{E} \subset D\left(t, T_0, \vec{x}(T_0)\right)$ (рис. 1 – левый нижний). Самый редкий случай.

Вариант 3: $D\left(t, T_0, \vec{x}(T_0)\right) \subset \overline{E}$ (рис. 1 – средний нижний).

Вариант 4: $\widetilde{E} = \overline{E} \cap D\left(t, T_0, \vec{x}(T_0)\right) \neq \varnothing$ (рис. 1 – правый нижний). Это наиболее общий случай расположения ЦМ и ОД.

Будем осуществлять ортогональное проектирование (шаг 4) на основе теории проектирующих операторов (раздел 4) в данной работе.

4. Проектирующие операторы в областях достижимости

Теперь, рассмотрим проектирующие операторы (иногда их также называют оператором проектирования или проекционным оператором), а также их основные определения и свойства. Проектирующий оператор – это тот математический аппарат, который позволяет нам реализовать ортогональное проектирование ЦМ на ОД (шаг 4). Проективной плоскостью принято называть расширенную евклидову плоскость или же евклидову плоскость, которая дополнена несобственной (бесконечно удаленной) прямой.

Все формулы рассматриваются для случая, когда V – n-мерное векторное пространство. Пусть A – проектирующий оператор в V, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ – базис V. Квадратная матрица порядка n, i-й столбец которой состоит из координат вектора $A(b_i)$ в базисе $b_1, b_2, \dots, b_n$ (для всех i = 1, 2, …, n), называется матрицей оператора A в $b_1, b_2, \dots, b_n$.

В дальнейших формулах, будем полагать, что базис M – $a_1, a_2, \dots, a_n$, а базис M' – $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$. Тогда оператор

$$P(a_i) = \begin{cases} a_i, \text{для каждого } i = 1,2,\dots,m \\ 0, \text{для каждого } i = m+1, m+2, \dots, n \end{cases}.$$

Рассмотрим первый способ задания оператора. Нетрудно понять, что матрица оператора P на подпространство M параллельно M' в базисе, полученном объединением базисов M и M', т.е. в базисе $a_1, a_2, \dots, a_n$ имеет вид:

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где число единиц на главной диагонали матрицы (1) равно m, т.е. размерности подпространства M.

Также оператор A может быть задан с помощью системы линейных неравенств:

(2)
$$\begin{cases} y_1 \geq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{n1} \\ y_2 \geq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_{n1} \\ \cdots \\ y_n \geq a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_{n1} \end{cases},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$ для всех i,j=1,2,…,n. Тогда A – матрица оператора A в стандартном базисе, где $A = (a_{ij})$ – матрица составленная из коэффициентов в системе неравенств (2)

Равенства системы линейных уравнений (2) можно записать, как:

(3) $$\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T,$$

(4) $$\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)^T.$$

Отметим одно из важнейших свойств проектирующих операторов. Если A – матрица оператора в некотором базисе, а **x** (3) – столбец координат вектора x в том же базисе, то столбец **y** (4) координат вектора A(x) в том же базисе вычисляется по формуле **y**=A**x**.

В результате, можно говорить о возможности использования проектирующих операторов при ортогональном проецировании ЦМ на ОД. В данном разделе были приведены основные формулы проектирующих операторов, а вообще это можно реализовать в автоматическом режим, например, на Python [17] с помощью библиотеки NumPy [18].

NumPy — дополнительная библиотека, которая подключается к языку Python, и осуществляет поддержку больших многомерных массивов и матриц, а также большая библиотека высокоуровневых математических функций для операций с этими массивами.

5. Заключение

Таким образом, во втором разделе показана важность использования ОД в ТОУ динамическими системами на основе примеров типичных задач этой теории. В третьем разделе приводится описание основных фаз и этапов обобщенной процедуры выбора оптимальных программ управления структурной динамикой СДО. На основании проведенного в четвертом разделе анализа, видно, что возможно использовать проектирующие операторы при ортогональном проектировании ЦМ на ОД. Кроме того, в статье даны пояснения к ключевым терминам и основные формулы.

Исследования, выполненные по данной тематике, проводились при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ (№№ **16-29-09482-офи-м**, **17-08-00797, 17-06-00108, 17-01-00139, 17-20-01214, 17-29-07073- офи-м, 18-07-01272, 18-08-01505, 19–08–00989**), Госзадания Министерства образования и науки РФ **№2.3135.2017/4.6**, в рамках бюджетной темы № **0073–2019–0004**, и Международного проекта ERASMUS+, Capacity building in higher education, №73751-EPP-1-2016-1-DE-EPPKA2-CBHE-JP.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Иностранная литература, 1960. 401 с.
3. Костюкова О., Курдина М. Теория оптимального управления // Наука и инновации. 2017. Т. 7, № 173. С. 24-27. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/teoriya-optimalnogo-upravleniya (дата обращения: 26.01.2019).
4. Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных технических объектов. М.: Наука, 2006. 410 с.
5. Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Анализ междисциплинарного взаимодействия современной информатики и кибернетики: теоретические и практические аспекты // Трудф XII Всероссийского Совещания по проблемам управления. Москва, 16-19 июня 2014 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 8625-8636.
6. Новиков Д.А. Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития. М.: ЛЕНАНД, 2016. 160 с.
7. Бир С. Мозг фирмы. М.: УРСС, 2005. 415 с.
8. Винер Н. Кибернетика и общество. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 200 с.
9. Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. М.: Наука, 1983. 338 с.
10. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
11. Булгаков Б.В. Колебания. М.: Гостехтеориздат, 1954. 852 с.
12. Толпегин О.А. Области достижимости летательных аппаратов. СПб: БГТУ ВОЕНМЕХ им. Д.Ф. Устинова, 2013. 141 с.
13. Толпегин О.А. Управление ракетами на основе расчёта областей достижимости // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2015. Т. 14, № 1. С. 73-82. DOI: 10.18287/1998-6629-2015-14-1-73-82.
14. Тимофеев И.С., Толпегин О.А. Приближенный расчет области достижимости космического летательного аппарата // Известия РАРАН. 2010. № 4(66). С. 34-39.
15. Губанов В. А., Захаров В. В., Коваленко А. Н. Введение в системный анализ / Под ред. Л. А. Петросяна. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1988. 232 с.
16. Petrosjan L.A., Zenkevich N.A. Game Theory. Singapore: World Scientific Publishing, 1996. 352 p.

17. https://docs.python.org/3/
18. https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/