УДК 517.929

ОДНА АППРОКСИМАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Р. И. Шевченко

Уральский федеральный университет им. Первого президента России Б.Н. Ельцина

Россия, 620002, Екатеринбург, Мира ул., 19

E-mail: oma170@hotmail.com

Ю. Ф. Долгий

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук

Россия, 620990, Екатеринбург, Софьи Ковалевской ул., 16

E-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

Ключевые слова: периодические дифференциальные уравнения с последействием, оптимальная стабилизация, конечномерные аппроксимации.

Аннотация: Рассматривается задача оптимальной стабилизации для системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Используется функциональное пространство состояний. Допустимые управления зависят от элементов функционального пространства состояний и периодически от времени. Причем явная зависимость от времени предполагается кусочно-постоянной. Рассматривается квадратичный критерий качества переходных процессов. Исходная задача аппроксимируется задачами оптимальной стабилизации для периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами. Для аппроксимационных задач построены эквивалентные дискретные задачи оптимальной стабилизации. Изучаются вопросы точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления периодической системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. Эффективность предложенного алгоритма решения задачи оптимальной стабилизации для периодической системы с запаздыванием подтверждена компьютерным моделированием.

1. Аппроксимационные задачи оптимальной стабилизации

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A_1(t)x(t) + A_2(t)x(t-\tau) + B(t)u, t \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)\,, \tag{1}$$

где $x : [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$; $A_1(\cdot), A_2(\cdot), B(\cdot)$ — матричнозначные ω-периодические функции, интегрируемые по Лебегу на $[0, \omega]$; τ — постоянное запаздывание.

Ставится задача — найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1) и минимизирует критерий качества переходных процессов

$$J = \int_0^\infty \left[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)\right] dt, \tag{2}$$

где $R(t), Q(t), t \in \mathbb{R}$, — значения непрерывных ω-периодических матричнозначных функций, которые являются положительно определенными матрицами.

В качестве аппроксимационных систем для (1) выбираются системы периодических дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{\mathrm{d}y_0(t)}{\mathrm{d}t} = A_1(t)y_0(t) + A_2(t)y_N(t) + B(t)u, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{N}{\tau}\left(y_{i-1}\left(\left[\frac{tN}{\tau}\right]\frac{\tau}{N}\right) - y_i\left(\left[\frac{tN}{\tau}\right]\frac{\tau}{N}\right)\right), \quad i = 1, ..., N, \tag{4}$$

где $[a]$ — целая часть числа a, $y_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, ..., N,$ $N \geqslant 1$. Для аппроксимационных систем используются следующие критерии качества переходных процессов

$$J_N = \int_0^\infty \left[y_0^{\mathrm{T}}(t)Q(t)y_0(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)\right] dt, \ N \geqslant 1. \tag{5}$$

Системе дифференциальных уравнений (3), (4) можно поставить в соответствие дифференциальное уравнение в функциональном пространстве состояний $C\left(\left[-\frac{\tau}{N}, 0\right],\right.$ $\left.\mathbb{R}^{n\times(N+1)}\right)$, подпространство решений которого конечномерно [1]. Аппроксимации, используемые в [1] при решении задачи стабилизации для периодических систем с последействием, отличны от аппроксимаций, предложенных в данной работе. Система (4) может рассматриваться, как модификация систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые традиционно используются в аппроксимационной теории оптимальной стабилизации для систем с последействием [2–4].

При решении поставленной задачи ограничимся случаем, когда τ рационально соизмеримо с периодом ω, т. е. $\tau = \omega/m$, где $m \in \mathbb{N}$.

Предполагается также специальная зависимость допустимых управлений от времени на периоде для аппроксимационной системы (3), (4)

$$u_N\left(Y_N\left(\cdot\right), t\right) = u_i\left(Y_N\left(\cdot\right)\right), \ t \in \left[(i-1)\frac{\omega}{M}, i\frac{\omega}{M}\right), \ i = \overline{1, M}, \tag{6}$$

где $u_i(\cdot) : C\left(\left[-\frac{\tau}{N}, 0\right], \mathbb{R}^{n\times(N+1)}\right) \to \mathbb{R}^r$ — непрерывные отображения, $Y_N(\cdot) \in C\left(\left[-\frac{\tau}{N}, 0\right],\right.$ $\left.\mathbb{R}^{n\times(N+1)}\right)$ определяет функциональное состояние системы (3), (4). Допустимые управления (6) периодически продолжаются по t на всю числовую ось. Полагается также, что в системе (4) выбираются $N = Mp$, $p \in \mathbb{N}$.

2. Дискретная задача оптимальной стабилизации

Метод решения задачи оптимальной стабилизации для периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами предложен в [5].

Конструктивная реализация рассматриваемого подхода разработана в [6] для линейных периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Выбор управлений, формируемых согласно правилу (6), позволяет заменить аппроксимационную задачу оптимальной стабилизации (3),(4),(5) эквивалентной дискретной задачей оптимальной стабилизации для системы разностных уравнений

$$\widehat{y}_{j+1} = \widehat{A}_j^0 \widehat{y}_j + \widehat{A}_j^{N-1} \widehat{y}_{j-N+1} + \widehat{A}_j^N \widehat{y}_{j-N} + \widehat{B}_j \widehat{u}_j,\ j \in \mathbb{N}_0 = 0 \cup \mathbb{N}. \tag{7}$$

Дискретный критерий качества переходных процессов имеет вид

$$\widehat{J}_N = \sum_{j=0}^{+\infty} \Big[\widehat{y}_j^{\mathrm{T}} \widehat{Q}_j^{0\,0} \widehat{y}_j + \widehat{y}_j^{\mathrm{T}} \widehat{Q}_j^{0\,N-1} \widehat{y}_{j-N+1} + \widehat{y}_j^{\mathrm{T}} \widehat{Q}_j^{0\,N} \widehat{y}_{j-N} + \widehat{y}_{j-N+1}^{\mathrm{T}} \widehat{Q}_j^{N-1\,0} \widehat{y}_j$$
$$+ \widehat{y}_{j-N+1}^{\mathrm{T}} \widehat{Q}_j^{N-1\,N-1} \widehat{y}_{j-N+1} + \widehat{y}_{j-N+1}^{\mathrm{T}} \widehat{Q}_j^{N-1\,N} \widehat{y}_{j-N} + \widehat{y}_{j-N}^{\mathrm{T}} \widehat{Q}_j^{N\,0} \widehat{y}_j + \widehat{y}_{j-N}^{\mathrm{T}} \widehat{Q}_j^{N\,N-1}$$
$$\times \widehat{y}_{j-N+1} + \widehat{y}_{j-N}^{\mathrm{T}} \widehat{Q}_j^{N\,N} \widehat{y}_{j-N} + 2\widehat{y}_j^{\mathrm{T}} \widehat{N}_j^0 \widehat{u}_j + 2\widehat{y}_{j-N+1}^{\mathrm{T}} \widehat{N}_j^{N-1} \widehat{u}_j + 2\widehat{y}_{j-N}^{\mathrm{T}} \widehat{N}_j^N \widehat{u}_j + \widehat{u}_j^{\mathrm{T}} \widehat{R}_j \widehat{u}_j \Big]. \tag{8}$$

Здесь $\widehat{A}_j^p, \widehat{B}_j, \widehat{Q}_j^{p\,q}, \widehat{N}_j^p, \widehat{R}_j$, $p, q = 0, N-1, N$, — mN-периодические матрицы. Начальные условия $\widehat{y}_i, i = \overline{-N, 0}$, предполагаются заданными.

Дискретная mN-периодическая задача оптимальной стабилизации (7),(8) эквивалентна задаче оптимальной стабилизации порядка $(N+1)\,n$

$$\widehat{Y}_{j+1} = \widehat{\widehat{A}}_j \widehat{Y}_j + \widehat{\widehat{B}}_j \widehat{u}_j,\ \ \widehat{\widehat{J}}_N = \sum_{i=0}^{+\infty} \left[\widehat{Y}_i^{\mathrm{T}} \widehat{\widehat{Q}}_i \widehat{Y}_i + 2\widehat{Y}_i^{\mathrm{T}} \widehat{\widehat{N}}_i \widehat{u}_i + \widehat{u}_i^{\mathrm{T}} \widehat{R}_i \widehat{u}_i \right],\ j \in \mathbb{N}_0. \tag{9}$$

Процедура решения задачи оптимальной стабилизации (9) описана в статье [6]. Если оптимальное стабилизирующее управление дискретной задачи (9) существует, то по нему можно построить оптимальное стабилизирующее управление вида (6) для аппроксимационной системы (3), (4). Используя связь системы с запаздыванием (1) и аппроксимационных систем (3), (4), строится приближение оптимального стабилизирующего управления для системы с запаздыванием.

Список литературы

1. Долгий Ю. Ф., Кошкин Е. В. Использование конечномерных аппроксимаций в задаче стабилизации периодических систем с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. № 1. С. 29-45.
2. Красовский Н. Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 4. С. 716-724.
3. Delfour M. C. The linear quadratic optimal control problem for hereditary differential systems: theory and numerical solution // Applied Mathematics and Optimization. 1976. Vol. 3, No. 2-3. P. 101-162.
4. Gibson J. S. Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM Journal on Control and Optimization. 1983. Vol. 21, No. 1. P. 95-139.
5. Долгий Ю. Ф., Кошкин Е. В. Оптимальная стабилизация линейных периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последействием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, No. 1. С. 87-98.
6. Шевченко Р. И., Долгий Ю. Ф. Дискретная процедура оптимальной стабилизации периодических линейных систем дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2018. № 124. С. 891-906.