УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А.А. Замышляева
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru

О.Н. Цыпленкова
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: tcyplenkovaon@susu.ru

Е.В. Бычков
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: bychkovev@susu.ru

Ключевые слова: уравнения соболевского типа высокого порядка, относительно полиномиально ограниченный пучок операторов, модель линейных волн в плазме, оптимальное управление.

Аннотация: В работе исследована задача оптимального управления для уравнения соболевского типа четвертого порядка с относительно полиномиально ограниченным пучком операторов. Результаты применены к исследованию оптимального управления решениями начально-конечной задачи для модели линейных волн в плазме. Начально-конечные условия являются обобщением условий в задаче Коши, которые неразрешимы при произвольных начальных значениях. Работа основывается на методе фазового пространства, разработанного Г.А. Свиридюком, и теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов, разработанной А.А. Замышляевой. В статье рассмотрено уравнение, которое описывает ионно-звуковые волны в плазме во внешнем магнитном поле, полученное впервые Ю.Д. Плетнером.

1. Введение

Пусть $\Omega = (0,a) \times (0,b) \times (0,c) \subset \mathbb{R}^3$. В статье исследуется оптимальное управление решениями следующей задачи:

$$(\lambda - \Delta)x_{tttt}(s,t) = (\Delta - \lambda')x_{tt}(s,t) + \alpha \frac{\partial^2 x(s,t)}{\partial s_3^2} + u(s,t), s \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

(2) $$x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}.$$

Модель (1) – (2) описывает ионно-звуковые волны в плазме во внешнем магнитном поле [1]. Параметры в уравнении (1) связывают между собой такие физические величины как ионная гидрочастота, частота Ленгмюра и радиус Дебая. Функция $x(s,t)$ представляет обобщенный потенциал электрического поля, а функция $u(s,t)$ – внешнее воздействие.

Задачу (1), (2) будем исследовать в рамках теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов [2]. Рассмотрим абстрактное уравнение соболевского типа высокого порядка

(3) $$Ax^{(n)} = B_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + B_0 x + y + Cu,$$

где операторы $A,\ B_{n-1},\ \ldots, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, функции $u : [0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{Y}$ $(\tau < \infty)$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства.

Дополним уравнение (3) начально-конечными условиями

(4) $$\begin{array}{l} P_{in}\left(x^{(k)}(0) - x_k^0\right) = 0, \\ P_{fin}\left(x^{(k)}(\tau) - x_k^\tau\right) = 0, \end{array} \qquad k = \overline{0, n-1},$$

здесь $P_{in(fin)}$ – некоторые проекторы в пространстве $\mathfrak{X}$. Таким образом, задача оптимального управления заключается в отыскании пары $(\hat{x},\hat{u})$, где $\hat{x}$ – решение задачи (3), (4), а $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$ – управление, для которого выполняется соотношение

(5) $$J(\hat{x},\hat{u}) = \min_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(x,u).$$

Здесь $J(x,u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества, $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

В основе многих неклассических моделей математической физики лежат уравнения соболевского типа. В работе для решения задачи оптимального управления решениями линейных уравнений соболевского типа высокого порядка используются идеи и методы, полученные Г.А. Свиридюком и его учениками [3], [4] при исследовании уравнений соболевского типа первого порядка. В работе исследуется начально-конечная задача [5]. Отличительной особенностью этой задачи является то, что одна проекция решения задается в начальный момент времени, а другая – в конечный. Впервые начально-конечная задача для уравнений соболевского типа первого порядка была рассмотрена в работах Г.А. Свиридюка и С.А. Загребиной.

2. Полиномиально A-ограниченные пучки операторов и проекторы. Сильные решения

Обозначим через $\vec{B}$ пучок операторов $B_{n-1},\ldots,B_0$. Множества $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$ и $\sigma^A(\vec{B}) = \mathbb{C}\backslash\rho^A(\vec{B})$ назовем *A-резольвентным множеством* и *A-спектром* пучка $\vec{B}$, соответственно. Оператор-функцию комплексной переменной $R^A_\mu(\vec{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\vec{B})$ назовем *A-резольвентой пучка $\vec{B}$*.

Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено условие

$$\int_\gamma \mu^k R_\mu^A(\vec{B})d\mu \equiv 0, \quad k = \overline{0, n-2}, \tag{6}$$

где γ – контур, ограничивающий область, содержащую относительный спектр пучка $\vec{B}$. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B})\mu^{n-1}Ad\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mu^{n-1}AR_\mu^A(\vec{B})d\mu$$

– проекторы в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Обозначим $\mathfrak{X}^0 = \ker P$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{X}^1 = \operatorname{im} P$ и $\mathfrak{Y}^1 = \operatorname{im} Q$. Если пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, то пучок операторов $\vec{B}$ называется (A,p)-ограниченным.

Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, имеет место (6) и выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered}\sigma^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}) \cup \sigma_1^A(\vec{B}), \sigma_k^A(\vec{B}) \neq \varnothing, k = \overline{0,1}; \\ \text{и существует контур } \gamma_0 \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } \Gamma_0 \subset \mathbb{C} \text{ такую, что} \\ \Gamma_0 \bigcap \sigma_0^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}),\ \overline{\Gamma}_0 \bigcap \sigma_1^A(\vec{B}) = \varnothing.\end{gathered} \tag{7}$$

$$\int_{\gamma_0} \mu^m R_\mu^A(\vec{B})d\mu \equiv 0, m = \overline{0, n-2}. \tag{8}$$

Операторы

$$P_{fin} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \mu R_\mu^A(\vec{B})Ad\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$$

и $P_{in} = P - P_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ являются проекторами в пространстве $\mathfrak{X}$ [2].

Определение 1. *Вектор-функцию $x \in H^n(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) : x_{(n)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ назовем сильным решением уравнения*

$$Ax^{(n)} = B_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + B_0 x + y, \tag{9}$$

если она п. в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (9) назовем сильным решением задачи (4), (9), если оно удовлетворяет (4).

Теорема 1. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, выполнены условия (6), (7), (8). Тогда для любых $x_k^0, x_k^\tau \in \mathfrak{X}, k = \overline{0, n-1}$ и $y \in H^{p+n}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (4) для уравнения (9).*

3. Оптимальное управление

Рассмотрим начально-конечную задачу (4) для линейного уравнения соболевского типа (3), где функции x, y, u лежат в гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$, соответственно.

Рассмотрим пространство управлений

$$\overset{\circ}{H}{}^{p+n}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : u^{(p+n)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}), u^{(q)}(0) = 0, q = \overline{0,p}\},$$

$p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+n} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

В пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{p+n}(\mathfrak{U})$ выделим некоторое замкнутое выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_{ad}$. Вектор-функцию $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$ будем называть оптимальным управлением решениями задачи (3), (4), если выполнено условие (5).

Докажем существование оптимального управления $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$, минимузирующего функционал качества

$$J(x,u) = \mu \sum_{q=0}^{n} \int_0^\tau ||x^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}||^2 dt + \nu \sum_{q=0}^{p+n} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt. \tag{10}$$

Здесь $\mu, \nu > 0$, $\mu + \nu = 1$, $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, p+n$, самосопряженые и положительно определенные операторы, а $\tilde{x}(t)$ – плановое состояние системы.

Теорема 2. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнены условия (6), (7), (8). Тогда для любых x_k^0, $x_k^\tau \in \mathfrak{X}$, $k = \overline{0, n-1}$ и $y \in H^{p+n}(\mathfrak{Y})$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (3), (4).*

Редуцируя задачу (1) – (2) к уравнению (3), положим

$$\mathfrak{X} = \{x \in W_2^{l+2}(\Omega) : x(s) = 0, s \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{Y} = W_2^l(\Omega),$$

где $W_2^l(\Omega)$ – пространства Соболева. Определим операторы $A = \Delta - \lambda$, $B_2 = (\lambda' - \Delta)$, $B_0 = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $B_3 = B_1 = \mathbb{O}$. Операторы $A, B_3, B_2, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ для всех $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Обозначим через $\varphi_{ijk} = \left\{\sin \frac{\pi i s_1}{a} \sin \frac{\pi j s_2}{b} \sin \frac{\pi k s_3}{c}\right\}$ собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа, где i, j, $k \in \mathbb{N}$, а соответствующие им собственные значения обозначим через $\lambda_{ijk} = -\sqrt{\left(\frac{\pi i}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2}$.

Поскольку $\{\varphi_{ijk}\} \subset C^\infty(\Omega)$, то мы получаем

$$\mu^4 A - \mu^3 B_3 - \mu^2 B_2 - \mu B_1 - B_0 =$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^{\infty} [(\lambda_{ijk} - \lambda)\mu^4 + (\lambda_{ijk} - \lambda')\mu^2 - \alpha \left(\tfrac{\pi k}{c}\right)^2] < \varphi_{ijk}, \cdot > \varphi_{ijk},$$

где $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Лемма 1. *[2] Пусть выполнено одно из следующих условий:*
(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$;
(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$.
Тогда пучок $\vec{B}$ полиномиально $(A, 0)$-ограничен и выполнено условие (6).

A-спектр пучка $\vec{B}$ составляют решения $\mu_{ijk}^l, l = \overline{1,4}$, уравнения

$$(\lambda_{ijk} - \lambda)\mu^4 + (\lambda_{ijk} - \lambda')\mu^2 - \alpha \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2 = 0. \tag{11}$$

Построим проектор

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если выполнено (i);} \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda_{ijk}=\lambda} \langle \cdot, \varphi_{ijk} \rangle \varphi_{ijk}, \text{ если выполнено (ii).} \end{cases}$$

Для построения проектора P_{fin} выберем область $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$, содержащую, например, конечное множество $\sigma_0^A(\vec{B})$ точек μ_{ijk}^l A-спектра пучка $(\vec{B})$ и такую, что $\partial\Gamma_0 \bigcap \sigma_0^A(\vec{B}) = \varnothing$. Как нетрудно видеть, область Γ_0 можно выбрать такой, что $\partial\Gamma_0 = \gamma_0$ – контур. Таким образом, выполнено условие (7).

Рассмотрим начально-конечную задачу

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{\lambda_{ijk}\neq\lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_1^A(\vec{B})} < x(\cdot, 0) - x_0^0, \varphi_{ijk} > \varphi_{ijk} = 0, \\ \textstyle\sum_{\lambda_{ijk}\neq\lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_1^A(\vec{B})} < x_t(\cdot, 0) - x_1^0, \varphi_{ijk} > \varphi_{ijk} = 0, \\ \textstyle\sum_{\lambda_{ijk}\neq\lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_1^A(\vec{B})} < x_{tt}(\cdot, 0) - x_2^0, \varphi_{ijk} > \varphi_{ijk} = 0, \\ \textstyle\sum_{\lambda_{ijk}\neq\lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_1^A(\vec{B})} < x_{ttt}(\cdot, 0) - x_3^0, \varphi_{ijk} > \varphi_{ijk} = 0, \\ \textstyle\sum_{\lambda_{ijk}\neq\lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_0^A(\vec{B})} < x(\cdot, \tau) - x_0^\tau, \varphi_{ijk} > \varphi_{ijk} = 0, \\ \textstyle\sum_{\lambda_{ijk}\neq\lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_0^A(\vec{B})} < x_t(\cdot, \tau) - x_1^\tau, \varphi_{ijk} > \varphi_{ijk} = 0, \\ \textstyle\sum_{\lambda_{ijk}\neq\lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_0^A(\vec{B})} < x_{tt}(\cdot, \tau) - x_2^\tau, \varphi_{ijk} > \varphi_{ijk} = 0, \\ \textstyle\sum_{\lambda_{ijk}\neq\lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_0^A(\vec{B})} < x_{ttt}(\cdot, \tau) - x_3^\tau, \varphi_{ijk} > \varphi_{ijk} = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

для уравнения (1) с граничными условиями (2).

Теорема 3. *При любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ таком, что выполнены условия леммы 1, и любых $\tau \in \mathbb{R}_+, x_k^0$, $x_k^\tau \in \mathfrak{X}, k = \overline{0,3}$, существует единственное решение задачи оптимального управления $(\hat{x}, \hat{y})$ для уравнения (1) с условиями (2), (12), минимизирующее функционал (10).*

Список литературы

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
2. Замышляева А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 2. С. 5-28.
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2003.
4. Манакова Н.А. Метод декомпозиции в задаче оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 8, № 2. С. 133-137.
5. Загребина С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2013. Т. 6, №о 2. С. 5-24.