УДК 681.5

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

М.Ю. Лившиц

Самарский государственный технический университет

Россия, 443100, Самара, Молодогвардейская ул., 244

E-mail: usat@samgtu.ru

Ключевые слова: оптимальное управление, тепломассоперенос, линия переключения, краевая задача, граничные условия, стандартизующая функция.

Аннотация: Предлагается метод приближенного определения пространственно-распределенного оптимального по быстродействию управления объектами с распределенными параметрами, в форме краевой задачи тепломассопереноса. Задача решается в технологически обоснованной постановке с подвижным правым концом траектории в негладкой бесконечномерной области конечных состояний, порожденной Чебышевской мерой. Предлагаемый метод решения позволяет получать эффективные алгоритмы оптимального по быстродействию управления промышленными процессами тепломассопереноса.

1. Введение

Наибольшей эффективности от оптимизации следует ожидать при максимальном использовании всех потенциальных возможностей управляющего воздействия, которое в технологических процессах, связанных с тепломассопереносом, обычно распределено во времени и пространстве. Решению задач определения оптимального пространственно-временного распределенного управления процессами тепломассопереноса в современных технологиях посвящено большое количество публикаций [1-4].

Однако для их решения численными методами необходим достаточно трудоемкий анализ корректности приближений по А.Н. Тихонову, оценка погрешности приближений и скорости сходимости порождаемых ими минимизирующих последовательностей [5-8].

Другой проблемой является корректная формулировка краевой оптимальной задачи и, в первую очередь, связанная с ней метрика оценки области конечных состояний управляемой распределенной субстанции $\theta(l,\tau)$в задачах с подвижным правым концом траектории. В этой связи следует отметить, что даже в тех работах, где фиксируется правый конец оптимальной траектории [7, 8], за счет погрешностей измерения, усечения моделей и т.п. фактически решается задача с подвижным правым концом траектории, а игнорирование этого обстоятельства на этапе постановки задачи приводят к существенным потерям по функционалу. Положение усугубляется для тех случаев, когда заданное состояние лежит в области недостижимости [8, 9]. Топология множества конечных состояний определяется в большинстве работ среднеквадратичной метрикой [1, 2, 10, 11]. Такой критерий точности весьма удобен в вычислительной практике, т.к. представляет собой сильновыпуклый непрерывный функционал, что позволяет для многих объектов получать решения достаточно эффективно[1, 2]. Однако, с промышленные технологии тепломассопереноса в подавляющем большинстве случаев требуют обеспечить не среднеквадратичное допустимое результирующее отклонение от заданного состояния, а абсолютное [4, 7, 9, 12]. Так при термообработке ответственных изделий из стальных, титановых и алюминиевых сплавов, особенно при нагреве в режиме высокотемпературной термомеханической обработки (ВТМО), максимальное отклонение температурного поля от заданного обычно не должно превышать 0,5% в пределах всего объема заготовки. Технология сквозного нагрева под пластическую деформацию заготовок из этих сплавов для производства ответственных деталей предъявляет такие же требования, так как локальный недогрев ведет к снижению стойкости формирующего инструмента, повышению расхода энергии на деформацию, ухудшению качества изделия, а локальный перегрев – к необратимым изменениям свойств металла и, следовательно, к браку. Процессы термообработки, пайки, плавки в гарниссажной оболочке и ряд других требуют получения допустимого абсолютного отклонения от требуемого результирующего относительного температурного распределения. Технология большинства видов химико-термической обработки (ХТО) также регламентирует абсолютные величины отклонений от заданного состояния $\theta^*(l)$. Так при цементации регламентируется глубина слоя, где концентрация углерода снижается до 40% от поверхностной, а допустимая абсолютная погрешность составляет ±10÷15%. Аналогичные требования предъявляют азотирование, нитроцементация и другие виды ХТО. При анализе конкретных технологических процессов ХТО очевидно, что величина абсолютного отклонения распределения легирующего элемента от требуемого непосредственно влияет на эксплуатационные свойства изделия. Минимаксная оценка уклонения $\rho_\infty = \max_l|\theta(l,\tau^0) - \theta^*(l)|$, представляющая собой норму в пространстве L_∞ является в этих ситуациях более адекватным критерием точности и будет использована в дальнейшем [3, 4. 7-9].

2. Постановка задачи оптимального управления технологическими процессами тепломассопереноса

При математическом моделировании широкого круга процессов тепломассопереноса часто возможно ограничиться одномерной линеаризованной математической моделью в форме [1-4, 10, 13]:

(1) $$\partial\theta(l,\tau)/\partial\tau = \partial^2\theta(l,\tau)/\partial l^2 + \Gamma\,\partial\theta(l,\tau)/l\partial l = F(l,\tau),$$

(2) $$\theta(l,\tau)|_{\tau=0} = \nu(l),\ \partial\theta(l,\tau)/\partial l|_{l=0} = 0,\ \partial\theta(l,\tau)/\partial l|_{l=1} + b\theta(l,\tau)|_{l=1} = \gamma(\tau),$$

где $F(l,\tau), \gamma(\tau)$ – соответствующие функции, $\tau \in [0,\tau^0\,]$, $l \subset \overline{\Omega}$, $\Gamma = 0{,}1$ – параметр формы, а $b = const$.

Такая модель описывает, например, индукционный нагрев или ХТО достаточно длинного цилиндра Г=1 или пластины Г=0. При этом в качестве относительной переменной $\theta(l,\tau)$ рассматриваются относительные пространственно-временные распределения соответствующей субстанции – температуры, концентрации, напряженности магнитного 1-4 поля и т.п.

В соответствии с вышеизложенными соображениями поставим оптимальную задачу быстродействия.

Требуется определить управление $F(l,\tau)=F^0(l,\tau)\in \overline{\mathfrak{R}}$, обеспечивающее в условиях соответствующих ограничений перевод объекта (1)÷(2) из заданного начального состояния $\nu(l) \in C[0,1]$ в заданную область $\overline{\Omega}$, представляющую собой ограниченную ε-окрестность нулевого элемента $\theta(l,\tau^0) \equiv 0$, определяемую выражением: $\overline{\Omega} = \{\theta(l,\tau^0)\colon \max_l|\theta(l,\tau^0)| \le \varepsilon_0\}$ при минимальном значении функционала J_b,: $inf_F\, J_b(\upsilon,\tau) = \min_{\theta(l,\tau^0)\in\Omega} \tau^0$ и заданном значении допустимой погрешности ε_0. Управляющее воздействие $F(l,\tau)$, ограниченное энергетическими возможностями, лежит в допустимой области множества $\overline{\mathfrak{R}}$ кусочно-непрерывных функций, отвечающих условиям физической реализуемости, а сама область в относительных единицах трансформируется в отрезок.

(3) $\qquad 0 \le F(l,\tau) \le F_{max} = 1$

3.Общее решение задачи

Для общего вида распределенного оптимального управления вида $F(l,\tau) = F^0\,(l,\tau)$ без использования обременительных общепринятых ограничивающих допущений $F(l,\tau) = F_1(l)\ F_2(\tau)$ путем анализа распределенной проблемы моментов в форме Е.А. Клестова удается получить содержательную информацию о характере управления.

(4) $\qquad F^0\,(l,\tau) = 0{,}5\, F_{max}(1+sign\ G_0(l,\tau))$.

Выражение (4) определяет релейный характер пространственно-временного управления $F^0\,(l,\tau)$, принимающего на прямоугольнике $E_p\{l,\tau\colon l \in [0,1],\tau \in [0,\tau^0]\}$ только свои предельно допустимые согласно (3) значения $F^0 = F_{max}$ и $F^0 = F_{min}=0$. Сформированная по методу моментов [1, 3, 4, 11] сложной комбинацией собственных функций и чисел прямой краевой задачи (1), (2) функция переключения $G_0(l,\tau)$ определяет на этом прямоугольнике границу l_g, разделяющую пространственно-временные области с различными граничными значениями оптимального управления и являющуюся решением уравнения:

(5) $\qquad G_0(l,\tau)=0$.

При этом релейный характер (6) оптимального управления $F^0\,(l,\tau)$ в случае распределенного управления обосновывает вариационную задачу определения параметров оптимальной линии переключения $l_g = {l_g}^0(\tau)$ на координатно-временной плоскости в отличие от сосредоточенного оптимального управления, где параметрами, подлежащими определению являются моменты переключения [1-4, 7-9, 12]. Поскольку отыскание линии переключения l_g непосредственно по (5) связано с серьезными техническими затруднениями, не позволяющими получить конструктивное решение задачи, ее определение предлагается осуществить путем решения новой вспомогательной вариационной задачи на условный экстремум функционала быстродействия J_b, в которой в роли искомой экстремали (управляющего воздействия) выступает линия переключения $l_g(\tau)$, а в роли дополнительных дифференциальных связей фигурируют уравнения математической модели объекта управления (1), (2).

Точное аналитическое решение такой вторичной задачи также весьма затруднительно. Поэтому в целях получения сравнительно простых, но эффективных результатов предлагаются методы получения квазиоптимальных ее решений.

4. Модальный метод приближенного решения задачи

Преобразуем краевую задачу (1), (2) в задачу Коши в форме бесконечной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно мод $\tilde{\theta}_n(\tau)$, n=0,1,2, ...

(6) $$d\tilde{\theta}_n/d\tau + {\mu_n}^2\tilde{\theta}_n = \tilde{\Phi}(\mu_n, \tau, F,) + \tilde{R}_\Gamma(\mu_n, \tau), n = 0,1,2 \dots,$$

используя соответствующие конечные интегральные преобразования по пространственной переменной l, где ядро преобразования выбирается в соответствии с системой координат в операторе Лапласа в (1), μ_n- собственные числа в соответствующей задаче Штурма-Лиувиля, а $\tilde{\Phi}(\mu_n, \tau, F,)$ и $\tilde{R}_\Gamma(\mu_n, \tau)$; – соответствующие интегральные преобразования составляющих стандартизующей функции, зависящие от правой части исходной системы (1) и граничных условий (2) соответственно.

Теперь можно сформулировать вторичную оптимальную задачу.

Требуется найти в классе кусочно-непрерывных функций $l_g(\tau) \in \overline{\Re} \subset L_2[0, \tau^0]$ такую линию переключения $l^*{}_g(\tau)$, подчиненную ограничению $0 \leq l^*{}_g(\tau) \leq 1$, при которой объект управления (6) переводится за минимально возможное время τ^0 из начального состояния $\tilde{\theta}_n(0)$, n=0,1,2… в заданную выпуклую, достижимую на ограниченном временном интервале и не содержащую точку $\tilde{\theta}_n(0)$ область $\tilde{\Omega}$ в пространстве коэффициентов $\tilde{\theta}_n$: $\tilde{\Omega} = \{\tilde{\theta}_n: \max_{l\in[0,1]}|\theta(l, \tau^0) - \theta^*(l)| \leq \varepsilon_0;\ \varepsilon_0 > 0\}$, где $\tilde{\theta}_n$ и $\theta(l, \tau)$ связаны формулами обращения соответствующего интегрального преобразования [1-3]. Для отыскания приближенного оптимального управления ${l_g}^0$ объектом (6) с точностью до вектора параметров используем стандартную процедуру принципа максимума Понтрягина [14]. Класс функций ${l_g}^0$, на котором следует искать приближенное решение вторичной оптимальной задачи ограничен множеством n- параметрических кусочно-непрерывных кривых на прямоугольнике E_p^n, где n - число учитываемых мод. Момент окончания процесса τ^0и момент времени $\tau^1 \in [0, \tau^0]$ разрыва или излома кривой переключения являются параметрами, определяемыми альтернансным методом Э.Я. Рапопорта [3, 4] путем решения соответствующей трансцендентной системы алгебраических уравнений.

5. Аппроксимативный метод приближенного решения

Основное содержание метода сводится к аппроксимации линии переключения $l_g(\tau) = [\arg G_0(l, \tau) = 0]$ полиномами: $l_g(\tau) = \sum_{i=0}^{I} a_i\,\tau^i, i = 1,2,..I$; $\tau_0^g = \sum_{j=0}^{J_\tau} b_j\,l^j, j = 1,2,\dots,J_\tau$ с оценкой приближения по функционалу J_b при заданной точности ε_0.

Эти выражения параметризуют задачу в пространстве коэффициентов a_i , b_j и порядка аппроксимации I и J_τ линий переключения. Основанием для построения квазиоптимального алгоритма альтернансным методом [3, 4, 8, 12] и оценки приближения служит непрерывная монотонная зависимость $\varepsilon_0(\tau^{0)}$ [3, 4].

Нетрудно видеть, что предлагаемый метод редукции к дуальной вариационной задаче и последующего определения соответствующих аналитических приближений для линии переключения оптимального управления релейной формы сохраняется при моделировании объекта уравнением более высокой размерности, чем (1)÷(2) в том случае, когда управляющее воздействие по-прежнему можно считать распределенным только по одной пространственной координате вне зависимости от размерности пространственной области изменения функции состояния объекта

5.Заключение

Предлагаемый подход достаточно хорошо зарекомендовал себя при решении практических задач [7-9, 12, 15]. Эффективность полученных решений по быстродействию повысилась на 15-30% по сравнению с использованием сосредоточенного управления. Для тестовых типовых задач максимальное относительное отклонение приближенных решений от точных не превышало 7%

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 17-08-00593)

Список литературы

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
2. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М: Наука, 1977. 480 с.
3. Рапопорт Э.Я. Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 366 с.
4. Рапопорт Э.Я., Лившиц М.Ю., Плешивцева Ю.Э Альтернансный метод в задачах оптимизации процессов технологической теплофизики: основы теории, вычислительные алгоритмы, опыт применения // Труды IV Минского Международного форума «Тепломассообмен ММФ 2000». Минск: ИТМО, 2000. Т. 3. С. 298-305.
5. Тихонов А.Н. О методах регуляризации задач оптимального управления // ДАНСССР, 1965. Т. 162, № 4. С. 763-766.
6. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: МГУ, 1974. 374 с
7. Лившиц М.Ю. Оптимизация технологических процессов по системным критериям качества // Известия Самарского научного центра РАН. Т. 3, № 1. С. 86-92.
8. Рапопорт Э.Я., Лившиц М.Ю, Плешивцева Ю.Э. Системные проблемы оптимизации объектов с распределенными параметрами // Сборник докладов 4-й Всероссийской научной конференции «Управление и информационные технологии». СПб.: СПбГЭТУ ЛЭТИ, 2006. С. 123-129.
9. Livshits M.Yu. Soft and Hardware for the Optimal Control of Coupled Temperature, Electromagnetic and Concentration Fields in CAM System // 40 Intemationales wissenschaftliches Kolloquium. Band 4, Vortragsreihen Technische Universität Ilmenau. Thuringen, 1995. Z. 71-75.
10. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 480 с.
11. Клестов Е.А. Метод распределенных моментов в задаче быстродействия при нескольких ограничениях на управление // Математическое программирование. Труды Уфимского авиационного института. 1973. №. 59. С. 26-34.
12. Livshits M.Yu., Borodulin B.B., Korshikov S.E. Optimization of Temperature Distributions in Critical Cross-sections of Load-bearing Structures of Measurement Optical Systems of Autonomous Objects // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 92. Thermophysical Basis of Energy Technologies (TBET-2016). Article Number 01053. DOI: http://dx.doi.org/10.1051/matecconf/20179201053.
13. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
14. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, 384 с.
15. Лившиц М.Ю., Деревянов М.Ю., Копытин С.А. Распределенное управление температурными режимами элементов конструкций автономных объектов // Материалы XIV Минского Международного форума по тепло- и массообмену. Минск, 2012. Т. 1. Часть 1. С. 719-722.