УДК 517.977

ТЕРМИНАЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

М.М. Хрусталев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Московский авиационный институт
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
E-mail: mmkhrustalev@mail.ru

Ключевые слова: стохастическая система, управление, терминальная инвариантность.

Аннотация: Полученные ранее условия терминальной инвариантности стохастических систем диффузионного типа конкретизируются для линейных систем и даются рекомендации по синтезу управлений, обеспечивающих терминальную инвариантность.

1. Введение

Важной задачей теории управления динамическими системами является задача синтеза стратегии управления, обеспечивающей постоянное значение терминального критерия (в общем случае векторного) независимо от действующих на систему детерминированных, но заранее неизвестных, переменных во времени возмущений. Эту задачу Л.И. Розоноэр назвал задачей слабой инвариантности и получил для нее локальные необходимые условия [1]. Однако более естественен для этого вида инвариантности термин – терминальная инвариантность, соответствующий термину терминальное управление в работах по управлению конечным состоянием объекта. В этой задаче автором были получены необходимые и одновременно достаточные условия, а в ее обобщении – задаче абсолютной инвариантности – достаточные условия [2].

В работах [3, 4] была поставлена новая задача теории инвариантности – задача о терминальной инвариантности управляемых стохастических динамических систем диффузионного типа. Для этой задачи были получены общие достаточные условия инвариантности [3, 4]. В данной работе эти условия конкретизируются для линейных стохастических систем диффузионного типа. Для этого класса систем они доводятся до достаточно конструктивных алгоритмов синтеза стратегий управления, обеспечивающих инвариантность. Так как будет изучаться только терминальная инвариантность, слово «терминальная» далее будем опускать.

2. Формулировка задач терминальной инвариантности

Будем предполагать, что управляемая динамическая система описывается векторным дифференциальным уравнением Ито

(1) $$dx(t) = f(t, x(t), u_1(t, x(t)))dt + g(t, x(t), u_2(t))dw(t),$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где $t \in [t_0, t_1]$ – время ($t_m \le t_0 < t_1$); $x := (x_1,...,x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n$ – состояние системы; $w(t) := (w_1(t),...,w_q(t))^{\mathrm{T}} \in R^q$ – стандартный винеровский процесс; $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования; $u_1(t,x) := -L(t)x + L_0(t) \in R^{m_1}$, $u_2(t) \in R^{m_2}$ – управления; начальная точка (t_0, x_0) и момент t_1 заданы. Функции $f(t, x, u_1)$, $g(t, x, u_2)$ в (1) имеют вид $f(t, x, u_1) = A_0(t)x + B_0(t)u_1 + C_0(t)$, $g(t, x, u_2) = B_1(t, u_2) + C_1(t)$, где столбцы матрицы $B_1(t, u_2)$ имеют вид $B_{1k}(t)u_2$, $k = \overline{1, q}$. Матрицы $A_0(t)$, $B_0(t)$, $C_0(t)$, $u_2(t)$, $C_1(t)$, $L(t)$, $L_0(t)$, $B_{1k}(t)$, $k = \overline{1, q}$, имеют соответствующие размеры, их элементы – заданные на интервале $[t_m, t_1]$ непрерывные функции.

Пусть фиксированы управления $u_1(t, x), u_2(t)$ и начальная точка $(t_0, x_0) \in B_0$, $B_0 = [t_m, t_1) \times R^n$. При этих условиях через $D(t_0, x_0)$ обозначим множество реализаций $x(\cdot)$ случайного процесса, описываемого уравнением (1). Введем также множество $D = \cup D(t_0, x_0),\ (t_0, x_0) \in B_0$.

На множестве D определим функционал (терминальный критерий)

(2) $$J(x(\cdot)) = F(x(t_1)),\ F(x) = Q^{\mathrm{T}}x,\ Q \in R^n.$$

Определение 1. *Динамическую систему* (1) *при фиксированных управлениях* $u_1(t, x), u_2(t)$ *будем называть инвариантной по возмущениям, если для любой фиксированной начальной точки* $(t_0, x_0) \in B_0$ *критерий* (2) *принимает постоянное значение* $J_c(t_0, x_0)$ *с вероятностью* 1 *на множестве* $D(t_0, x_0)$.

Определение 2. *Динамическую систему* (1) *при фиксированных управлениях* $u_1(t, x), u_2(t)$ *будем называть абсолютно инвариантной, если критерий* (2) *принимает одно и то же постоянное значение* J_c^a *на множестве* D *с вероятностью* 1 *для каждой начальной точки* $(t_0, x_0) \in B_0$.

3. Достаточные условия терминальной инвариантности

Следуя [4] введем в рассмотрение множество Φ функций $(t, x) \to \varphi(t, x)$: $[t_m, t_1] \times R^n \to R^1$ имеющих непрерывные производные φ_t, $\varphi_x = (\varphi_{x_1},..., \varphi_{x_n})^T \in R^n$, $\varphi_{xx} = \{\varphi_{x_i x_j}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, множество M непрерывных функций $t \to \mu(t) : [t_m, t_1] \to R^1$ и обозначим: $K(t, x, u_1, u_2) = \varphi_t(t, x) + \varphi_x^{\mathrm{T}}(t, x) f(t, x, u_1) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(t, x, u_2)\, \varphi_{xx}(t, x)]$, $S(t, x, u_2) = \varphi_x^{\mathrm{T}}(t, x) g(t, x, u_2)$, где $\sigma(t, x, u_2) = g(t, x, u_2)\, g(t, x, u_2)^{\mathrm{T}}$.

В работе [4] доказаны следующие теоремы 1, 2.

Теорема 1. 1. *Для того, чтобы система* (1) *была инвариантна по возмущениям, достаточно существования функций* $\varphi \in \Phi$, $\mu \in \mathrm{M}$, *таких что:*

1) $\varphi(t_1, x) = F(x), \quad x \in R^n$,

для всех $x \in R^n$, $t \in [t_m, t_1)$ *выполнены условия:*

2) $K(t, x, u_1(t, x), u_2(t)) = \mu(t)$,

3) $S(t, x, u_2(t)) = 0$.

2. *Если условия п.*1 *теоремы выполнены, то для любой фиксированной начальной точки* $(t_0, x_0) \in B_0$ *критерий* (2) *принимает постоянное значение*

$$J_c(t_0, x_0) = \varphi(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(t)\, dt$$

с вероятностью 1 *на множестве* $D(t_0, x_0)$.

В теореме 1 и последующих теоремах 2, 1а, 2а предполагается, что управления $u_1(t, x), u_2(t)$ фиксированы.

Теорема 2. 1. *Для того, чтобы система* (1) *была абсолютно инвариантна, достаточно существования функции* $\varphi \in \Phi$, *функции* $\mu \in \mathrm{M}$ *и постоянной* $A > 0$, *таких, что:*

$$1)\ \varphi(t_1, x) = F(x), \quad x \in R^n,$$

для всех $x \in R^n$, $t \in [t_m, t_1)$ *выполнены условия:*

$$2)\ K(t, x, u_1(t, x), u_2(t)) = (\mu(t) - A\varphi(t, x))(t_1 - t)^{-1},$$

$$3)\ S(t, x, u_2(t)) = 0.$$

2. *Если условия п.*1 *теоремы выполнены, то для всех* $(t_0, x_0) \in B_0$ *с вероятностью* 1 *на множестве* $D(t_0, x_0)$ *справедливо равенство*

$$J(x(\cdot)) = F(x(t_1)) = J_c^a,\ J_c^a = \frac{\mu(t_1)}{A}.$$

Замечание 1. *Если терминальных условий несколько, можно считать, что критерий* (2) *векторный, и записать условия теоремы* 1 *или* 2 *для каждой компоненты критерия.*

Конкретизируем теоремы 1, 2 для рассматриваемой здесь задачи с линейным уравнением системы (1). Функцию $\varphi(t, x)$ возьмем в виде

$$\varphi(t, x) = \psi^{\mathrm{T}}(t)x + \gamma(t), \tag{3}$$

где векторная функция $\psi(t) \in R^n$ и скалярная функция $\gamma(t)$ непрерывно дифференцируемы на интервале $[t_m, t_1]$. Тогда условие 1) теорем 1, 2 приобретает форму:

$$\psi(t_1) = Q,\ \gamma(t_1) = 0,$$

а функции $K(t, x, u_1, u_2)$ и $S(t, x, u_2)$ в условиях 2), 3) этих теорем имеют вид

$$K = \frac{d\gamma(t)}{dt} + \frac{d\psi^{\mathrm{T}}(t)}{dt}x + \psi^{\mathrm{T}}(t)(A_0(t) - B_0(t)L(t))x + \psi^{\mathrm{T}}(t)(B_0(t)L_0(t) + C_0(t)),$$

$$S = (S_1, S_2, .., S_q) = \psi^{\mathrm{T}}(t)(B_1(t, u_2) + C_1(t)),\ S_k = \psi^{\mathrm{T}}(t)(B_{1k}(t)u_2 + C_{1k}(t)),$$

где $C_{1k}(t) \in R^n$ – столбцы матрицы $C_1(t)$.

Отметим, что при выбранной функции $\varphi(t, x)$ вида (3) функция S не зависит от x.

В результате теоремы 1 и 2 принимают следующий вид.

Теорема 1а. *Для того чтобы система* (1) *была инвариантна по возмущениям, достаточно существования функции* φ *вида* (3) *и функции* $\mu \in \mathrm{M}$, *таких что:*

$$1)\ \psi(t_1) = Q,\ \gamma(t_1) = 0,$$

при всех $t \in [t_m, t_1)$ *выполнены условия:*

$$2)\ \frac{d\gamma(t)}{dt} + (B_0(t)L_0(t) + C_0(t))^{\mathrm{T}}\psi(t) = \mu(t),$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} + (A_0(t) - B_0(t)L(t))^{\mathrm{T}}\psi(t) = 0,$$

3) $(B_{1k}(t)u_2 + C_{1k}(t))^{\mathrm{T}}\psi(t) = 0,\ k = \overline{1,q}$.

При этом

$$J_c(t_0, x_0) = \psi^{\mathrm{T}}(t_0)x_0 + \gamma(t_0) + \int_{t_0}^{t_1}\mu(t)\,dt.$$

Теорема 2а. *Для того, чтобы система* (1) *была абсолютно инвариантна, достаточно существования функции* φ *вида* (3)*, функции* $\mu \in \mathrm{M}$ *и постоянной* $A > 0$*, таких, что выполнены условия* 1), 3) *теоремы* 1а *и при всех* $t \in [t_m, t_1)$ *условия:*

$$2)\ \frac{d\gamma(t)}{dt} + (B_0(t)L_0(t) + C_0(t))^{\mathrm{T}}\psi(t) = \frac{\mu(t) - A\gamma(t)}{t_1 - t},$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} + (A_0(t) - B_0(t)L(t))^{\mathrm{T}}\psi(t) = -\frac{A}{t_1 - t}\psi(t).$$

При этом $J_c^a = \dfrac{\mu(t_1)}{A}$.

Замечание 2. *Из самого определения абсолютной инвариантности следует, что для наличия этого свойства у системы* (1) *достаточно чтобы условия теоремы* 2 *или* 2а *выполнялись для почти всех реализаций случайного процесса лишь в моменты времени малого интервала* $[t_1 - \varepsilon, t_1]$. *Величина числа* $\varepsilon > 0$ *может быть различной для каждой реализации.*

4. Алгоритмы синтеза инвариантных систем

Сначала рассмотрим случай инвариантности по возмущениям (теорема 1а).

Если управление $u_1(t, x)$ и функция $\mu(t)$ заданы, то условия 1), 2) теоремы однозначно определяют функции $\gamma(t)$ и $\psi(t)$. Остается выполнить условия 3) теоремы. Их можно выполнить за счет выбора управления $u_2(t)$, входящего в условия 3) линейно.

Если $m_2 \ge q$ и $\operatorname{rank}\Omega(t) \ge q$, где $\Omega(t)$ матрица со строками $\psi^{\mathrm{T}}(t)B_{1k}(t),\ k = \overline{1,q},$ то условие 3) может быть выполнено за счет выбора управления $u_2(t)$. Если к тому же компоненты $u_2(t)$ непрерывные функции, то условия теоремы 1а выполнены и система (1) инвариантна по возмущениям.

В такой ситуации управление $u_1(t, x)$ можно использовать для выполнения дополнительных требований к процессу управления системой (1).

Если $\operatorname{rank}\Omega(t) < q$, то условия 3) можно попытаться выполнить используя часть компонент функции $\psi(t)$, но в этом случае для выполнения условия 2) теоремы придется использовать управление $u_1(t, x)$ выбирая вид матриц $L(t)$ и $L_0(t)$.

Выполнение условий теоремы 2а можно обеспечивать по описанной выше схеме для теоремы 1а. Однако, здесь все намного сложнее в связи с тем, что условия 2) теоремы 2а содержат сингулярности, которые приходится компенсировать соответствующими сингулярностями в компонентах управления $u_1(t, x)$.

5. Примеры

Пример 1.

$$dx_1 = (x_2 - x_3)dt + dw\,,$$
$$dx_2 = (2x_1 - x_3)dt - dw\,,$$
$$dx_3 = -x_2 dt + u_2 dw\,.$$

Критерий инвариантности по возмущениям имеет вид: $J = x_3(0)$, $t \in [t_m, 0]$, $t_m < 0$. Управление $u_2(t) = te^t \big/ (\frac{2}{9}e^{-2t} + (\frac{7}{9} - \frac{1}{3}t)e^t)$ решает задачу инвариантности по возмущениям ($\mu(t) \equiv 0$).

Пример 2.

$$dx_1 = u_1 dt + dw\,,$$
(4)
$$dx_2 = (2x_1 - x_3)dt - dw\,,$$
$$dx_3 = -(x_1 + x_2)dt\,.$$

Критерий инвариантности по возмущениям имеет вид: $J = x_3(0)$, $t \in [t_m, 0]$, $t_m < 0$.

Управление

(5) $$u_1 = -(L_2 + 2)x_1 - L_2 x_2 - L_3 x_3\,,$$

где L_2, L_3 – произвольные числа, обеспечивает инвариантность по возмущениям ($\mu(t) \equiv 0$). Подстановка управления (5) в (4) и замена переменной x_1 на $y = x_1 + x_2$ приводит к системе

$$dx_1 = u_1 dt + dw\,,$$
(6)
$$dx_2 = (2x_1 - x_3)dt - dw\,,$$
$$dx_3 = -(x_1 + x_2)dt\,,$$

откуда видно, что система (6) распалась на 2 подсистемы и переменная $x_3(t)$ не возмущаема.

Пример 3.

$$dx_1 = (x_2 + x_3)dt\,,$$
$$dx_2 = (x_1 + x_3)dt + dw\,,$$
$$dx_3 = (-x_2 + u_1)dt + u_2 dw\,.$$

Необходимо обеспечить абсолютную инвариантность (теорема 2а) системы по критерию $J = x_1(0)$, $t \in [t_m, 0]$, $t_m < 0$. Задачу абсолютной инвариантности решают управления $u_2(t) = -1$, $u_1 = -x_1 + x_2 - x_3 - \dfrac{Ax_1}{t^2} + \dfrac{A(x_2 + x_3)}{t}$, где постоянная $A > 2$.

Список литературы

1. Розоноэр Л.И. Вариационный подход к проблеме инвариантности // Автоматика и телемеханика. 1963, № 6. С. 744-756; 1963. № 7. С. 17-22.
2. Хрусталев М.М. Необходимые и достаточные условия слабой инвариантности // Автоматика и телемеханика. 1968. № 4. С. 17-22.
3. Хрусталев М.М. Инвариантность стохастических систем диффузионного типа // ДАН. 2017. Т. 476, № 2. С. 148-150.
4. Хрусталев М.М. Терминальная инвариантность стохастических систем диффузионного типа // Автоматика и телемеханика. 2018. № 8. С. 81-100.