

УДК 517.95

НЕПРЕРЫВНОЕ ГЛОБАЛЬНОЕ ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМ ГАМИЛЬТониАНОМ

Л.Г. Шагалова

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620990, Екатеринбург, С. Ковалевской ул., 16

E-mail: shag@imm.uran.ru

Ключевые слова: уравнение Гамильтона - Якоби, некоэрцитивный гамильтониан, фазовые ограничения, обобщенное решение, глобальное решение, характеристики, асимптотика.

Аннотация: Рассматривается возникающее в модели Кроу – Кимуры молекулярной биологии уравнение Гамильтона – Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом. Изучается задача Коши для этого уравнения с фазовыми ограничениями. Ранее с помощью методов оптимального управления и вариационного исчисления было доказано существование непрерывного обобщенного решения этой задачи на конечном отрезке времени, определяемом условием продолжимости характеристик. В данной работе представлены достаточные условия существования глобального (определенного на бесконечном временном интервале) непрерывного обобщенного решения, сохраняющего структуру, задаваемую начальным многообразием, и изучено поведение этого решения при больших значениях времени.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается следующее уравнение Гамильтона – Якоби, полученное в [1] для модели Кроу – Кимуры молекулярной эволюции.

$$(1) \quad \partial u / \partial t + H(x, \partial u / \partial x) = 0,$$

где гамильтониан имеет вид

$$(2) \quad H(x, p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}.$$

Входящая в (2) непрерывно дифференцируемая функция $f(\cdot)$ называется фитнесом. Уравнение (1) рассматривается при $t \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$. Предполагается также, что задана непрерывно дифференцируемая функция $u_0 : R \rightarrow R$ такая, что выполняется начальное условие

$$(3) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-1; 1].$$

Гамильтониан $H(\cdot)$ не удовлетворяет условию коэрцитивности

$$(4) \quad H(x, p) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty$$

при $x = \pm 1$. Рассматриваемая задача не имеет классического решения, к ней неприменимы также известные концепции обобщенного решения – минимаксного [2] и вязкостного [6].

В [3] введено понятие непрерывного обобщенного решения задачи (1)-(3), с помощью методов теории оптимального управления доказано его существование и показана неединственность. В [4, 5] выделены достаточные условия существования и обоснована конструкция обобщенного решения заданной структуры, такого, что в области, где определены выпущенные с начального многообразия классические характеристики уравнения (1), решение строится с их помощью. При этом решения рассматривались на ограниченном замкнутом множестве $\bar{\Pi}_T = [0; T] \times [-1; 1]$, где момент $T > 0$ определяется из условия продолжимости на отрезок $[0, T]$ характеристик – решений следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x, p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x, p) = f'(x) + (e^{2p} - e^{-2p})/2, \\ \dot{z} &= pH_p(x, p) - H(x, p), \end{aligned}$$

которая рассматривается вместе с начальными условиями

$$(6) \quad x(0, y) = y, \quad p(0, y) = u'_0(y), \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y \in [-1; 1].$$

Здесь $H_x(x, p)$ и $H_p(x, p)$ обозначают частные производные гамильтониана H в точке (x, p) соответственно по переменным x и p .

В [9] задача была рассмотрена на бесконечном временном интервале $t \geq 0$, введено понятие глобального обобщенного решения и выделены достаточные условия существования глобального обобщенного решения заданной структуры.

В настоящей работе конкретизированы условия на входные данные задачи (фитнес и начальную функцию), при которых выполнены достаточные условия существования глобального обобщенного решения заданной структуры, и проведено исследование поведения этого решения при больших значениях t – показано, что решение не имеет асимптотики.

2. Обобщенное решение на конечном отрезке времени

Приведем введенное в [3] определение непрерывного обобщенного решения. Для этого введем обозначения и напомним понятия суб- и супердифференциала

Пусть задано множество $W \subset R^2$. Символами \bar{W} и coW будем обозначать соответственно его замыкание и выпуклую оболочку. Символом $C(W)$ будем обозначать класс функций, непрерывных на множестве W .

Пусть $u(\cdot) \in C(\bar{W})$ и $(t, x) \in \bar{W}$. Субдифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$(7) \quad D^-u(t, x) = \left\{ (a, s) \in R^2 \left| \liminf_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in \bar{W}}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right. \right\}$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$(8) \quad D^+u(t, x) = \left\{ (a, s) \in R^2 \left| \limsup_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in \bar{W}}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leq 0 \right. \right\}$$

Пусть функция $u(\cdot) \in C(\bar{\Pi}_T)$ и точка $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$. Символом $\text{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot)$ дифференцируема. Определим множества

$$\partial_C u(t, x) = \text{co}\{(a, s) \mid a = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial t}, s = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial x}; \\ (t_i, x_i) \rightarrow (t, x) \text{ при } i \rightarrow \infty, (t_i, x_i) \in \bar{\Pi}_T \cap \text{Dif}(u)\},$$

$$\Pi_T = (0, T) \times (-1; 1), \Gamma_T = \{(t, x) \mid 0 < t < T, x = 1\} \cup \{(t, x) \mid 0 < t < T, x = -1\}.$$

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (1)–(3) в области $\bar{\Pi}_T$ назовем непрерывную функцию $u(\cdot)$, удовлетворяющую начальному условию (3) и условиям*

$$(9) \quad a + H(x, s) \leq 0, \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \forall (a, s) \in D^+u(t, x),$$

$$(10) \quad a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \forall (a, s) \in D^-u(t, x),$$

$$(11) \quad a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \Gamma_T, \forall (a, s) \in D^-u(t, x) \cap \partial_C u(t, x).$$

Отметим, что определение 1 отличается от определения вязкостного [6, 7] решения введением пересечения субдифференциала $D^-u(t, x)$ с множеством $\partial_C u(t, x)$. Это обусловлено тем обстоятельством, что в силу некоэрцитивности гамильтониана H (2) субдифференциал $D^-u(t, x)$ в точке $(t, x) \in \Gamma_T$, если он непуст, является неограниченным множеством, и без введения пересечения проверка условия (11), например, при $x = 1$ сводится к неравенству

$$a + H(1, s + k) = a - f(x) + 1 - e^{s+k} \leq 0 \quad \forall k \geq 0,$$

которое, очевидно, не выполняется.

В [3] доказано следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть функции $f(\cdot) : [-1, 1] \rightarrow R$, и $u_0(\cdot) : [-1, 1] \rightarrow R$ являются непрерывно дифференцируемыми. Тогда существует обобщенное решение $u(\cdot) : \bar{\Pi}_T \rightarrow R$ в смысле определения 1.*

2.1. Обобщенное решение заданной структуры

Из доказательства теоремы 1 следует, что обобщенное решение не является единственным. Поэтому важной является описанная ниже задача о построении обобщенного решения заданной структуры.

Пусть область $\Omega_0 \subset \bar{\Pi}_T$ образована графиками фазовых компонент характеристик (5)-(6):

$$\Omega_0 = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x = x(t, y), y \in [-1, 1]\}.$$

Рассмотрим функцию $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega_0$ вида:

$$(12) \quad u(t, x) = \max_{x(t, y)=x} \left[\int_0^t p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau)) d\tau + u_0(y) \right],$$

где $x(t) = x(t, y)$ и $p(t) = p(t, y)$, $t \geq 0$, являются соответственно фазовой и импульсной компонентами решения характеристической системы (5)-(6), определяемого параметром $y \in [-1; 1]$.

Задача о построении обобщенного решения заданной структуры заключается в построении непрерывного продолжения функции (12) на всю область $\bar{\Pi}_T$ так, чтобы полученная функция являлась обобщенным решением задачи (1)-(3) в смысле определения 1.

2.1.1. Достаточные условия существования решения заданной структуры. Пусть $x^-(t) = x(t, -1)$ и $x^+(t) = x(t, +1)$, $t \in [0, T]$ – фазовые компоненты характеристик, выпущенных в момент $t = 0$ из точек $x = -1$ и $x = 1$ соответственно.

Предположим, что для задачи (1)-(3) выполнены следующие условия

А. Фазовые компоненты $x(\cdot, y)$ и импульсные компоненты $p(\cdot, u'_0(y))$ характеристической системы (5) с начальными условиями (6) при $t = 0$ определены и удовлетворяют неравенствам

$$(13) \quad -1 \leq x^-(t) = x(t, -1) \leq x(t, y) \leq x(t, +1) = x^+(t) \leq 1, \quad |p(t, u'_0(y))| < \infty,$$

для всех $y \in [-1, 1]$, $t \in [0, T]$.

Пусть $\Pi_T = G_+ \cup G_0 \cup G_-$, где

$$(14) \quad G_0 = \{(t, x) \mid t \in [0, T], x^-(t) \leq x \leq x^+(t)\}.$$

$$(15) \quad G_+ = \{(t, x) \mid t \in [0, T], x^+(t) \leq x \leq 1\},$$

$$(16) \quad G_- = \{(t, x) \mid t \in [0, T], -1 \leq x \leq x^-(t)\},$$

Таким образом, наша цель заключается в построении обобщенного решения, которое совпадает с функцией (12) в области $\Omega_0 = G_0$. В [5] были указаны следующие условия, при которых существует такое решение.

В1. Производная $u'_0(\cdot) : [-1, 1] \rightarrow R$ непрерывна и удовлетворяет неравенствам

$$u'_0(1) < 0, \quad u'_0(-1) > 0.$$

В2. Производная $f'(\cdot) : [-1, 1] \rightarrow R$ – непрерывная и монотонно неубывающая функция, удовлетворяющая неравенствам

$$2f'(1) + e^{2u'_0(1)} < e^{-2u'_0(1)}, \quad -2f'(-1) + e^{-2u'_0(-1)} < e^{2u'_0(-1)}.$$

2.1.2. Непрерывное продолжение решения, сформированного из характеристик. Для доказательства существования непрерывного продолжения функции (12) на область $\bar{\Pi}_T$, удовлетворяющего определению 1 обобщенного решения, рассмотрим две вспомогательные задачи вариационного исчисления.

Пусть

$$(17) \quad H^*(x(t), \dot{x}(t)) = \inf_{p \in R} [p\dot{x}(t) - H(x(t), p)]$$

является гамильтонианом, сопряженным к исходному гамильтониану (2).

Рассмотрим две вспомогательные задачи вариационного исчисления на множестве всех непрерывно дифференцируемых функций $x(\cdot) : \bar{\Pi}_T \rightarrow R$

$$(18) \quad I(x(\cdot)) = \int_0^{\bar{t}} H^*(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \mapsto \max$$

$$(19) \quad x_1(0) = 1, \quad x_1(\bar{t}) = \bar{x}, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in G_1 = G_+;$$

$$(20) \quad x_2(0) = -1, \quad x_2(\bar{t}) = \bar{x}, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in G_2 = G_-$$

В [5] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть для задачи (1)-(3) выполнены условия **A**, **B1**, **B2**. Рассмотрим функцию $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_T$, совпадающую с функцией (12) в области $\Omega_0 = G_0$. Определим функцию для $(t_*, x_*) \in G_+$, $x_* < 1$, следующим образом

$$(21) \quad u(t_*, x_*) = u_0(1) + \int_0^{t_*} [p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))] d\tau,$$

где $x(t) = x^+(t, p_0(t_*, x_*))$, $p(t) = p^+(t, p_0(t_*, x_*))$ является единственным решением вариационной задачи (18), (19). Положим

$$u(t_*, 1) = u_0(1) + (f(1) - 1)t_*, \quad 0 \leq t_* \leq T.$$

Определим функцию для $(t_*, x_*) \in G_{+-}$, $x_* > -1$,

$$(22) \quad u(t_*, x_*) = u_0(-1) + \int_0^{t_*} [p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))] d\tau,$$

где $x(t) = x^-(t, p_0(t_*, x_*))$, $p(t) = p^-(t, p_0(t_*, x_*))$ – единственное решение вариационной задачи (18), (20). Положим

$$u(t_*, -1) = u_0(-1) + (f(-1) - 1)t_*, \quad 0 \leq t_* \leq T.$$

Построенная таким образом функция $u(t, x)$, $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$ удовлетворяет определению 1.

3. Глобальное обобщенное решение

Определение 2. Непрерывная функция $u : [0, \infty) \times [-1, 1] \rightarrow R$ называется глобальным обобщенным решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет начальному условию (3) и если для любого положительного T сужение этой функции на область $\bar{\Pi}_T$ удовлетворяет определению 1.

Пусть задано значение $y \in [-1; 1]$. Определим значение $T^*(y)$ так, что на интервале $[0, T^*(y))$ существует непродолжимое вправо решение характеристической системы (5),(6). Опираясь на свойства решений системы (5),(6), для $t \geq T^*(y)$ определим непрерывные продолжения фазовых компонент характеристик следующим образом.

$$x(t, y) = \begin{cases} -1, & \text{если } p(0, y) > 0 \\ 1, & \text{если } p(0, y) < 0. \end{cases}$$

Предположим, что для определенных таким образом функций выполнено условие

A1. Для всех $y \in [-1, 1]$, $t \geq 0$

$$-1 \leq x^-(t) = x(t, -1) \leq x(t, y) \leq x(t, +1) = x^+(t) \leq 1.$$

В [9] доказана

Теорема 3. Пусть для задачи (1)–(3) выполнены условия **A1**, **B1**, **B2**. Тогда существует глобальное обобщенное решение этой задачи.

Можно получить также другие достаточные условия существования глобального решения.

Теорема 4. Пусть для задачи (1)–(3) выполнены условия **B1**, **B2** и следующее условие на производную начальной функции

B3. $u'_0(1) \leq u'_0(y) \leq u'_0(-1)$, $y \in [-1; 1]$. Тогда существует глобальное обобщенное решение этой задачи.

Доказательство. Используя свойства решений характеристической системы (5),(6), можно показать, что из набора условий **B1**, **B3** следует выполнение условия **A1**, и таким образом, выполнены условия теоремы 3, при которых глобальное решение существует.

3.1. Поведение глобального решения при больших значениях времени

Во многих работах (см., например, обзор в [8]) исследовалась асимптотика вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби, получены условия равномерной сходимости решения к функции вида $v(x) + ct$. В этих условиях существенными являются коэрцитивность и строгая выпуклость гамильтониана по импульсной переменной.

Рассмотрим поведение глобального решения задачи (1)–(3) при больших значениях t . Заметим, что в открытой области, ограниченной графиками продолженных для всех $t > 0$ фазовых компонент $x^-(t)$ и $x^+(t)$ характеристик, по построению глобальное решение $u(t, x)$ совпадает с вязкостным.

Если существуют константа c и функция $v(x)$ такие, что $u(x, t) - v(x) - ct \rightarrow 0$, $t \rightarrow 1, x \in [-1; 1]$, они должны удовлетворять уравнению

$$(23) \quad H(x, Dv(x)) = c, \quad x \in (-1; 1).$$

Пусть функция фитнеса постоянна, $f(x) = f$, $f \in R$, $x \in [-1; 1]$. Тогда уравнение (23) выполняется только в случае, когда $Dv(x) = 0$, $x \in (-1; 1)$, то есть когда функция $v(x) = v$ постоянна. При этом $c = -f$. Таким образом, если для глобального решения существует асимптотика, она имеет вид $-ft + v$. Но эта линейная функция для всех $v \in R$ отличается от линейных функций $u(t, -1)$ и $u(t, 1)$, с которыми глобальное решение совпадает на границе фазовых ограничений. Таким образом, в общем случае для глобального решения не существует асимптотики вида $v(x) + ct$.

4. Заключение

В работе введено определение глобального непрерывного обобщенного решения уравнения Гамильтона-Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом и фазовыми ограничениями, возникающего в модели Кроу-Кимуры молекулярной эволюции. Получены достаточные условия существования такого решения, рассмотрено поведение решения при больших значениях t , показано, что решение не имеет асимптотики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00074а).

Список литературы

1. Saakian, D.B., Rozanova, O., Akmetzhanov, A. Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2008. Vol. 78, No. 4, 041908.
2. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
3. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, Вып. 2. С. 191-208.
4. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. Построение обобщенного решения уравнения, сохраняющего тип Беллмана в заданной области фазового пространства // Труды МИАН. 2012. Т. 277. С. 243-256.
5. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, Вып. 1. С. 220-235.
6. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, No. 1. P. 1–42.
7. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L. Hamilton-Jacobi Equations with State Constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318, No. 2. P. 643-683.
8. Ichihara N., Ishii H. The large-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations on the real line // Methods and Applications of Analysis. 2008. Vol. 15, No. 2. P. 223-242.
9. Subbotina N.N., Shagalova L.G. The study of evolution in the Crow–Kimura molecular genetics model using methods of calculus of variations // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1907, No. 1, 020001.