УДК 519.3:62-50

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ НАГРЕВА

Ж.Ш. Шаршеналиев
Институт автоматики и информационных технологий НАН КР
Кыргызстан, 720071, Бишкек, пр-т Чуй, 265
E-mail: avtomatika_nankr@mail.ru

Т.П. Самохвалова
Институт автоматики и информационных технологий НАН КР
Кыргызстан, 720071, Бишкек, пр-т Чуй, 265
E-mail: avtomatika_nankr@mail.ru

Ключевые слова: оптимальное управление, обратная связь, динамическое программирование Р. Беллмана, метод характеристик, высокотемпературный нагрев, скачки управления.

Аннотация: В задачах оптимального управления для математических моделей со степенными нелинейностями предложены новые формы решения уравнений Беллмана в виде бесконечных функционально-интегральных степенных рядов. Получены соответствующие бесконечные системы Риккати. В их решениях выявлено и обосновано наличие интервалов стационарности, по которым строятся стабилизирующие алгоритмы управления с обратной связью. Предложен новый способ построения приближенного управления, основанный на методе характеристик Н. Гюнтера. Компьютерное моделирование выполнено для процессов высокотемпературного нагрева, для которых свойственны резкие скачки расчетной величины управления. Предложен способ уменьшения скачков управления для одномерной модели с измерением текущего состояния процесса.

1. Введение

В данной статье приведены кратко результаты исследований, проводимых в лаборатории «Оптимальные и цифровые системы управления» ИАИТ НАН КР по разработке алгоритмов оптимального и стабилизирующего управления процессами нагрева объектов, описываемых уравнениями в частных (DPS) или обыкновенных производных (LPS). Рассмотрены несколько видов минимизируемых критериев качества, для них по методике А.И. Егорова [1, 2] выведены соответствующие уравнения Беллмана.

В дальнейших исследованиях использованы идеи работ В.И. Зубова, Н.М. Гюнтера, М.И. Иманалиева, С.Н. Алексеенко, Л.С. Понтрягина, Ж.-Л. Лионса и др. [3-6].

Для математических моделей со степенными нелинейностями предложены новые формы решения полученных уравнений Беллмана в виде бесконечных функционально-интегральных степенных рядов. Получены соответствующие бесконечные системы Риккати [7]. В период после публикации работы [7] получены следующие результаты.

В решениях полученных бесконечных систем Риккати выявлено и обосновано наличие интервалов стационарности, по которым построены стабилизирующие алгоритмы управления с обратной связью в LPS и DPS [8, 9].

Далее, в данной статье предложен новый способ построения приближенного решения функционального уравнения Беллмана и соответствующего управления в LPS, основанный на методе характеристик Н. Гюнтера [3] и методе дополнительного аргумента [4, 5 и др.], который разрабатывается в Институте математики НАН КР.

В работах [10, 11] в LPS на стыке методов динамического программирования Беллмана и метода параметризации и характеристик [3] и дополнительного аргумента [4,5] для одномерной модели нагрева с излучением тепла начата разработка нового способа приближенного решения уравнения Беллмана и соответствующего способа расчета управления с обратной связью. Удалось увидеть явную зависимость управления от параметров модели и критерия качества, в том числе от желаемого состояния процесса.

Компьютерное моделирование выполнено для процессов высокотемпературного нагрева, для которых свойственны резкие скачки расчетной величины управления.

В работе [12] предложен способ выбора параметров, обеспечивающих уменьшение или устранение резких скачков величины управления с обратной связью в одномерной модели с периодическим измерением текущего состояния процесса.

В работах [13, 14] продолжена верификация предложенного способа расчетов, организована автоматизированная неявная обратная связь в методе принципа максимума Л.С. Понтрягина при периодическом измерении текущего состояния управляемого процесса. Отметим, что в книге [6] показан глубокий сложный аналитический переход между формулами управляющей функции в методах принципа максимума Л.С. Понтрягина и динамического программирования Р. Беллмана. В перспективе, возможно, предложенный способ расчетов управления будет применен для DPS.

2. Скачки управления в DPS

Пусть процесс изменения температуры в однородном тонком стержне описывается уравнением

(2.1) $$\frac{\partial u(t,x)}{\partial \mathrm{t}} = a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + q(x)p(t),\ t\in[0,T],\quad 0\le x\le 1,$$

с начальным и граничными условиями

$$u(0,x)=u_0(x),\ \frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=0,\ \lambda\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=\alpha(T_c-u(t,1)).$$

Известно, что при нагреве при температуре выше 660^0С поликремний начинает светиться, и в моделировании в силу вступает закон Стефана-Больцмана об излучении тепла с поверхности стержня. Граничное условие на правом конце стержня принимает вид

(2.2) $$u(0,x)=u_0(x),\ \frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=0,\ \lambda\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=\alpha(T_c-u(t,1)-\gamma\sigma u^4(t,1)).$$

Здесь $u(t,x)$ – температура стержня в момент времени t в точке «x»; функции $q(x), u_0(x)\in L_2(0,1)$; a,λ,α,T – заданные постоянные; T_c – температура окружающей среды; $p(t)$ – управляющая функция из класса допустимых, $p(t)\in L_2(0,T)$; σ – постоянная Больцмана, коэффициент интегральной излучательной способности кремния, $\sigma = 3.12 \cdot 10^{-12} \dfrac{вт}{см^2 град^4}$; γ – вспомогательный множитель.

Под решением краевой задачи (2.1), (2.2) понимается обобщенное решение в смысле В.И. Плотникова, используемое в [1].

Минимизируемый критерий качества управления запишем в виде:

$$J = \xi_1 \int_0^T \left[u(t,1) - g\right]^2 \, dt + \xi_2 \left[u(T,1) - g\right]^2 + \beta \int_0^T p^2(t)\, dt, \tag{2.3}$$

где $\xi_1, \xi_2, g \geq 0, \beta \rangle 0$ – заданные постоянные, ξ_1, ξ_2 не равны нулю одновременно.

Задача 2.1. Найти синтезирующее управление $p^0(t) = p^0(t, u(t,x))$ и соответствующее решение $u(t,x) \in W_2^{1,1}$ краевой задачи (2.1) – (2.2), доставляющие минимальное значение критерию качества (2.3).

Управление $p^0(t,u)$ будем называть оптимальным относительно критерия (2.3).

Решаем задачу 2.1 с помощью методики [1,7-9]. Уравнение Беллмана имеет вид:

$$-\frac{\partial S(t,u)}{\partial t} = \xi_1 \left[u(t,1) - g(t,1)\right]^2 - \frac{a\alpha_5}{\alpha_4} u(t,1) v(t,1) - \frac{1}{4\beta}\left(\int_0^1 q(x) v(t,x) dx\right)^2 - \tag{2.4}$$

$$- \gamma\sigma \frac{a\alpha_7}{\alpha_4} u^4(t,1) v(t,1).$$

Решение функционального уравнения (2.4) будем искать в виде бесконечного степенного ряда

$$S(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i(t) u^i(t,1).$$

Получаем функциональную производную $v(t,x)$ функционала $S(t,u)$ по $u(t,x)$:

$$v(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} i k_i(t) u^{i-1}(t,1).$$

Оптимальное синтезирующее управление в задаче 2.1 равно

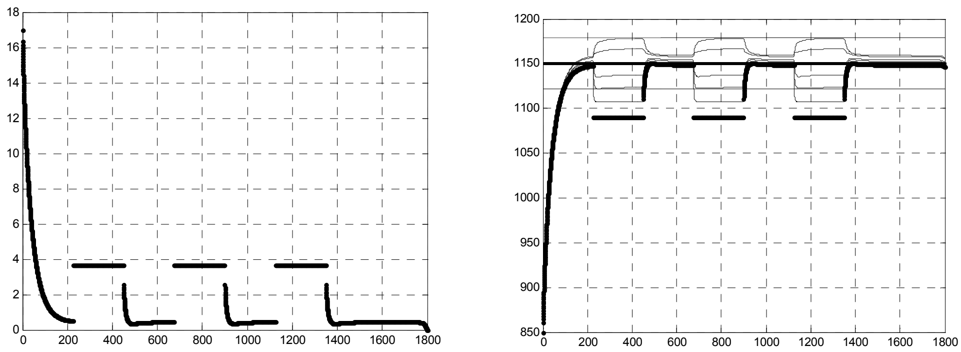
$$p^0(t) = -\frac{1}{2\beta} \int_0^1 q(x)\, dx \sum_{i=1}^{\infty} i k_i(t) u^{i-1}(t,1). \tag{2.5}$$

Следуя идее Р. Калмана для линейных задач в LPS, по (2.5) построим алгоритм управления для нелинейной задачи в DPS:

$$\overline{p}(t) = -\frac{1}{2\beta} \int_0^1 q(x)\, dx \sum_{i=1}^{\infty} i \overline{k}_i u^{i-1}(t,1), \tag{2.6}$$

где $\overline{k}_i$ – стационарные значения вспомогательных функций Риккати $k_i(t), i = 1, 2, \ldots$.

Пример 2.1 [8, 9]. Температура вдуваемой в реактор рабочей смеси $T_c = 1090^0 C$, интервал времени управления $T = 1800 сек$, интервал периодического вдувания смеси $\Delta = T/8$, желаемая температура $g = 1150$. Получили графики, приведенные на рис. 2.1. Выявлены скачки величины управления (а). Температура поверхности и нескольких прилегающих слоев резко падает до $1090^0 C$, затем возвращается в 5%-ую зону от $1150^0 C$. Температура центра не выходит выше 5%-ой зоны (б). Такой режим вдувания смеси соответствует технологическим требованиям не превышать центру стержня верхнюю границу 5%-ой зоны. Управление $p(t)$ характеризует удельную мощность электрического тока, пропускаемого через стержень. Возникает задача уменьшить или устранить скачки управления.



а) б)

Рис. 2.1. Управление $p_n(t)$ (а) и температура $u(t, x_j)$ (б) при вдувании смеси, $T_c = 1090^0 C$.

3. Скачки управления в LPS

Пример 3.1 [10-14]. Рассмотрим модель нагрева в обыкновенных производных:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bp(t) - \gamma\sigma x^4(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0; t_k]. \tag{3.1}$$

В численных расчетах для удовлетворительного достижения заданного желаемого состояния $g(t)$ объекта используем минимизацию квадратичного критерия качества

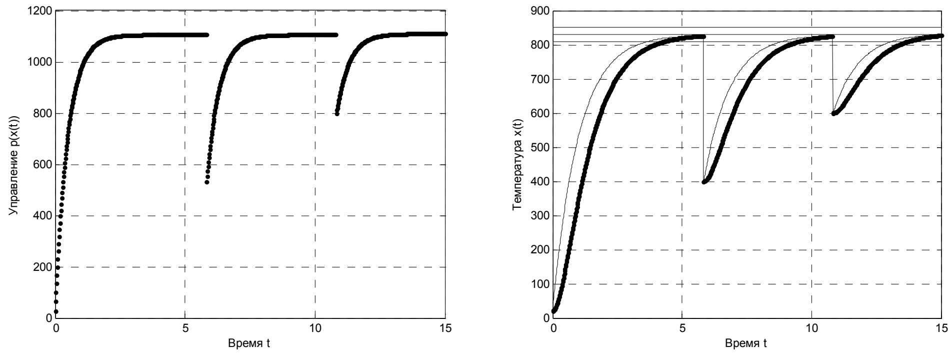
$$J_k = \gamma_1 \int_0^{t_k} (x(t) - g)^T Q(x(t) - g)dt + \gamma_2 (x(t_k) - g)^T F(x(t_k) - g) + \beta \int_0^{t_k} p^2(t)dt . \tag{3.2}$$

Линеаризованное уравнение Беллмана при $n = 1$, $A < 0$ запишем в виде

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} - Ax\frac{\partial S(t,x)}{\partial x} = \left(\gamma_1 Q - \frac{B^2}{\beta}\gamma_2^2 F^2\right)(x-g)^2, \; S(0,x) = \gamma_2 F(x-g)^2 . \tag{3.3}$$

Приближенное стабилизирующее управление $p(x(t))$, полученное из (3.3) по методу характеристик с линеаризацией уравнения Беллмана, имеет вид [10,11]:

$$p(x(t)) = -\frac{b}{2A\beta}Mx(t) + \frac{Bg(t)}{A\beta}M, \quad M = \gamma_1 Q - \frac{B^2}{\beta}\gamma_2^2 F^2 . \tag{3.4}$$



а) б)

Рис. 3.1. Управление (3.4) $p(t)$ (а) и температура (3.1) $x(t)$ (б) при периодическом измерении.

4. Заключение

Для задач оптимального управления процессами нагрева в LPS и DPS с тремя типами управлений ($p(t)$, $p(t,x)$ в уравнении модели объекта, $p(t)$ в граничном условии) с полиномиальными нелинейностями предложены несколько видов минимизируемых критериев качества. Модифицирована форма решения уравнения Беллмана. В решениях бесконечных систем Риккати выявлено и обосновано наличие интервалов стационарности, эти стационарные величины являются приближениями к горизонтальным асимптотам решений, позволяют построить приближенные стабилизирующие алгоритмы управлений с обратной связью.

Разработан еще один способ решения уравнения Беллмана в одномерной LPS, основанный на методе характеристик и дополнительного аргумента. Это позволило в рассмотренных примерах с желаемой величиной в виде гладкой функции уменьшить или устранить резкие скачки величины управления с обратной связью при измерении текущего состояния объекта в высокотемпературном нагреве.

Список литературы

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 463 с.
2. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
3. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Л.-М.: ОНТИ, 1934.
4. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. Бишкек: Илим, 1992. 112 с.
5. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. // Доклады АН СССР. 1992. Т. 323. № 3. С. 410-414; 1992. Т. 325. № 6. С. 111-115; 1993. Т. 329. № 5. С. 543-546.
6. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
7. Мамытов Дж., Самохвалова Т.П., Шаршеналиев Ж. Оптимизация температуры стержней поликремния // Автоматика и телемеханика. 2008. № 5. С. 91-100; Automation and Remote Control. 2008. Vol. 69, No. 5. P. 819-827.
8. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П., Сактанов У.А. Моделирование и оптимизация управляемых технологических процессов. Бишкек: Илим, 2009. 242 с.

9. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П. Приближенные алгоритмы управления и стабилизации в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами // Итоги науки. Том 2. Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. М.: РАН, 2014. С. 75-110.
10. Самохвалова Т.П. Приближенное решение уравнения Беллмана методом характеристик // Проблемы автоматики и управления. 2016. № 2 (31). С. 51-56.
11. Самохвалова Т.П. Приближенное решение уравнения Беллмана // Материалы Международной научной конференции «Механика твердых, жидких и газообразных сред», посвященной 80-летию д.ф.-м.н., проф. Я.И. Рудаева. Бишкек, 2-3 декабря 2016г. Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2017. Т. 17, № 1. С. 52-54.
12. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П., Макиенко Д.О. Алгоритм управления с периодическим контролем состояния объекта // Проблемы автоматики и управления. 2017. № 2 (33). С. 3-9.
13. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П., Третьякова Л.В. Алгоритм стабилизации высокотемпературных режимов объекта // Проблемы автоматики и управления. 2018. № 1 (34). С. 5-11.
14. Самохвалова Т.П. Приближенный алгоритм управления высокотемпературным нагревом // Материалы XIV Международной Азиатской Школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем». 20-31 июля 2018 г. Кыргызская республика, оз. Иссык-Куль, пансионат «Отель Евразия». Алматы: 2018. Тр. конф. Ч. 2. С. 182-192.