УДК 519.83

МНОГОШАГОВЫЕ КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ НА ПОЛНОМ ГРАФЕ

М.А. Булгакова
Санкт-Петербургский Государственный Университет
Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., 35
E-mail: mari_bulgakova@mail.ru

Л.А. Петросян
Санкт-Петербургский Государственный Университет
Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., 35
E-mail: spbuoasis7@peterlink.ru

Ключевые слова: многошаговая игра, кооперативная игра, попарное взаимодействие, характеристическая функция, сильная динамическая устойчивость.

Аннотация: Данная работа посвящена многошаговым играм с попарным взаимодействием. Рассматривается полный граф, вершинами которого являются игроки, а ребрами — связи между игроками. Введена характеристическая функция и доказана ее супермодулярность для одного шага игры. Предложен новый подход к построению характеристической функции многошаговой игры, основанный на использовании занчений характеристической функции одношаговой игры. На основе новой характеристической функции построен принцип оптимальности, представляющий собой аналог С-ядра, и доказана его сильная динамическая устойчивость. Работа проиллюстрирована примером.

1. Введение

Впервые исследование попарного взаимодействия на сети в некооперативной форме было сделано в [1]. Оно подразумевало собой взаимодействие один на один между игроками сети. Попарное взаимодействие было так же рассмотрено на примере распространения информации и дезинформации в социальных сетях в работе [2]. Подходы для нахождения оптимального поведения в многошаговых играх рассматривались в [5]. Условия сильной динамической устойчивости в двухшаговой игре с попарным взаимодействием были найдены в [3]. Динамические свойства кооперативных решений в игре n-лиц были рассмотрены в [4]. Следуя [8], рассмотрим вопрос о построении новой характеристической функции для многошаговой игры с попарным взаимодействием, и рассмотрим некоторые принципы оптимальности, построенные на основе этой функции.

2. Описание модели

Пусть задано абстрактное пространство $\mathbb{Z}$, называемое пространством состояний. В каждом состоянии $z \in \mathbb{Z}$ задана неантагонистическая игра n-лиц $\Gamma(z)$ на полной сети $g(z)$, вершинами которой являются игроки, а ребрами — связи между игроками. Игра $\Gamma(z)$ представляет собой семейство попарных одновременных биматричных игр $\{\gamma_{ij}(z)\}$ между соседями по сети, $i \in N, j \in N, i \neq j$.

Пусть $i \in N, j \in N, i \neq j$. Тогда i играет с j в биматричную игру $\gamma_{ij}(z)$ с матрицами выигрышей $A_{ij}(z)$ и $A_{ji}(z)$, игроков i и j, соответственно.

$$A_{ij}(z) = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(z) & a_{12}^{ij}(z) & \cdots & a_{1r}^{ij}(z) \\ a_{21}^{ij}(z) & a_{22}^{ij}(z) & \cdots & a_{2r}^{ij}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{ij}(z) & a_{m2}^{ij}(z) & \cdots & a_{mr}^{ij}(z) \end{pmatrix},$$

$$a_{pq}^{ij}(z) \geqslant 0, \quad p = 1, \ldots, m, \quad q = 1, \ldots, r, \quad i, j \in N$$

Для простоты дальнейших выкладок предполагается, что m и r одинаковы для всех i и j и всех z.

Стратегией игрока i в игре $\Gamma(z)$ является вектор $u_i(z) = (u_i^1(z), \ldots, u_i^j(z), \ldots u_i^n(z))$, где u_i^j — стратегия игрока i в биматричной игре $\gamma_{ij}(z)$. То есть стратегия игрока i — это набор номеров выбранных им строк (чистых стратегий) в биматричных играх $\gamma_{ij}(z)$. Стратегия игрока j — это набор номеров выбранных им столбцов в соответствующих бимматричных играх $\gamma_{ij}(z)$. Выигрыш игрока i в игре $\Gamma(z)$ опредляется следующим образом:

$$K_i(z) = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{u_i^j(z) u_j^i(z)}^{ij}(z)$$

Рассмотрим игру $\Gamma(z)$ в кооперативной форме. С этой целью определим характеристическую функцию $v(S; z), \quad S \subset N$ для каждого подмножества (коалиции) $S \subset N$ как нижнее (максиминное) значение антагонистической игры двух лиц коалиции S и дополнительной коалиции $N \setminus S$, построенной на основе игры $\Gamma(z)$, при этом выигрыш коалиции S определяется как сумма выигрышей игроков, входящих в S. Супераддитивность характеристической функции следует из ее определения. Обозначим через

$$\begin{aligned} \omega_{ij}^k &= \max_p \min_q \ a_{pq}^{ij}(z), \quad p = 1, \ldots, m; \quad q = 1, \ldots, r, \\ \omega_{ji}^k &= \max_q \min_p \ a_{pq}^{ji}(z), \quad p = 1, \ldots, m; \quad q = 1, \ldots, r. \end{aligned}$$

Функция $v(S; z)$ определяется по следующим формулам:

$$v(\{\varnothing\}; z) = 0,$$

$$v(\{i\}; z) = \sum_{j \in N, j \neq i} \omega_{ij}(z), \tag{1}$$

$$v(S; z) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} \max_{p,q} (a_{pq}^{ij}(z) + a_{pq}^{ji}(z)) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \setminus S} \omega_{ij}(z), \quad S \subset N, \tag{2}$$

$$v(N; z) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} \max_{p,q} (a_{pq}^{ij}(z) + a_{pq}^{ji}(z)).$$

Пусть в состоянии $z \in Z$ в игре $\Gamma(z)$ игроками были выбраны стратегии: $u_i(z) = (u_i^1(z), \ldots, u_i^n(z))$. В результате выбора этих стратегий осуществляется переход в состояние z', где происходит игра $\Gamma(z')$, состоящая из одновременных биматричных игр, с матрицами, зависящими от стратегий, выбранных в состоянии z. То есть состояние на следующем шаге игры зависит от состояния на текущем шаге, и от стратегий, выбранных на данном шаге. Можно определить отображение $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле:

$$z' = T(z; u_1(z), u_2(z), \ldots, u_n(z))$$

Многошаговая игра $G(z)$ происходит следующим образом. Игра $G(z_1)$ начинатеся в состоянии z_1. В состоянии z_1 происходит игра $\Gamma(z_1)$, игроки выбирают стратегии $u_1(z_1), u_2(z_1), \ldots, u_n(z_1)$, затем переходят в состояние $z_2 = T(z_1; u_1(z_1), u_2(z_1), \ldots, u_n(z_1))$. В состоянии z_k игроки играют в игру $\Gamma(z_k)$, выбирают стратегии $u_1(z_k), u_2(z_k), \ldots, u_n(z_k)$ и переходят в состояние $z_{k+1} = T(z_k; u_1(z_k), u_2(z_k), \ldots, u_n(z_k))$. Игра заканчивается на шаге ℓ в состоянии z_ℓ. Таким образом, в результате выбора стратегий на каждом шаге игры реализуется путь $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots, z_\ell$. Естественным образом определяется понятие стратегии в получившейся многошаговой игре $u(\cdot) = u\{(z)\}$, как набор стратегий игроков, определенный в каждом состоянии $z \in \mathbb{Z}$. Из приведенного выше описания следует, что любая ситуация $u(\cdot) = \{u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)\}$ однозначно определяет путь в игре, а следовательно и выигрыш каждого игрока, как сумму его выигрышей в играх, реализованных вдоль пути.

$$K_i(u(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a^{ij}_{u_i^j(z_k) u_j^i(z_k)}(z_k)$$

Заметим, что множество всевозможных путей в многошаговой игре $G(z)$ конечно. А, следовательно, конечно и множество всех возможных состояний в игре. Обозначим это множество через $\overline{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$ Введем в рассмотрение функцию $w(S), \quad S \subset N$:

$$w(S) = \max_z v(S; z).$$

Определим так же характеристическую функцию $V(S; z_k)$ многошаговой игры $G(z_k)$, начинающейся в состоянии z_k. Определим также

$$W(S; z_k) = (l - k + 1) w(S)$$

где ℓ — число шагов в игре $G(z_1)$.
Имеет место неравенство (см. [8]):

$$W(S, z_k) \geqslant V(S, z_k), \quad S \subset N$$

Рассмотрим вопрос о супермодулярности функции $w(S)$. Нами ранее было показано, что одношаговая игра $\Gamma(z)$ выпукла и характеристическая функция $v(S; z), \quad S \subset N$ супермодулярна.

Определение 1. *Характеристическая функция $v(S; z), \quad S \subset N$ называется супермодулярной, если для любых $X \subset N, Y \subset N$ выполняется неравенство:*

(3) $$v(X \cup Y; z) \geqslant v(X; z) + v(Y; z) - v(X \cap Y; z)$$

Функции $v(S;z), w(S) \quad S \subset N$ супермодулярны.

Определим множество дележей M_W в игре $G(z_1)$ как

$$M_W = \{x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = W(N; z_1), \quad x_i \geqslant W(\{i\}; z_1), \quad i \in N\}.$$

Под принципом оптимальности будем понимать любое подмножество множества M_W.

Введем в рассмотрение величину $L(\bar{z}_k)$ — суммарный выигрыш коалиции N в состоянии $\bar{z}_k \in \bar{z}$, где $\bar{z}$ — кооперативная траектория в игре $G(\bar{z}_1)$.

$$L(\bar{z}_k) = \sum_{\substack{i\in N, j\in N\\ i\neq j}} (a^{ij}(\bar{z}_k) + a^{ji}(\bar{z}_k)) \tag{4}$$

Предположим, что $w(S) < \min_{\bar{z}_k} L(\bar{z}_k), \quad S \neq N$. И введем в рассмотрение функцию $w(S;\bar{z}_k)$, $w(S;\bar{z}_k) = w(S), \quad w(N,\bar{z}_k) = L(\bar{z}_k)$. Пусть x — некоторый дележ в игре $G(\bar{z}_1)$. Рассмотрим в качестве принципа оптимальности аналог С-ядра для игры $G(\bar{z}_k)$ следующего вида $\hat{C}(W(S;\bar{z}_k))$:

$$\sum_{i\in S} x_i \geqslant (\ell - k + 1)w(S) = W(S;\bar{z}_k), \quad S \subset N, \quad S \neq N$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{t=k}^{\ell} L(\bar{z}_k) = \hat{W}(N;\bar{z}_k)$$

Предположим, что все $\hat{C}(W(S;\bar{z}_k)) \neq \varnothing$.

Определение 2. *[7] принцип оптимальности $\hat{C}(W(S;z_1))$ сильно-динамически устойчив в игре $G(z_1)$, если*

1). $\hat{C}(W(S;z_k)) \neq \varnothing, \quad k = \overline{1,\ell}$

2). Для каждого дележа $x \in \hat{C}(W(S;z_1))$ существует такая процедура распределения дележа $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\ell)$, $x = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j$ что

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_t \oplus \hat{C}(W(S;\bar{z}_{k+1})) \subset \hat{C}(W(S;\bar{z}_1)), \quad k = \overline{1,\ell}.$$

Утверждение 1. *Принцип оптимальности $\hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$ сильно-динамически устойчив.*

Приведен пример.

3. Заключение

Для многошаговых сетевых игр предложен новый подход к построению характеристической функции многошаговой игры. Этот подход обладает меньшей вычислительной сложностью, по сравнению с классическим. На основе новой характеристической функции построен принцип оптимальности, являющийся аналогом С-ядра, и доказана его сильная динамическая устойчивость. Показана супермодулярность характеристической функции для одношаговой игры. Работа проиллюстрирована примером, в котором рассмотерена трехшаговая игра трех лиц с попарным взаимодействием, построена характеристическая функция, как классическим способом, так и новым, предложенным в данной работе. Показана сильная динамическая устойчивость принципа оптимальности, введенного в данной работе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант No. 17-11-01079).

Список литературы

1. Dyer M., Mohanaraj V. Pairwise-Interaction Games // ICALP. 2011. Vol. 1. P. 159-170.
2. Acemoglua D., Ozdaglarb A., ParandehGheibib A. Spread of (mis)information in social networks // Games and Economic Behavior. 2010. Vol. 70, No. 2. P. 194–227.
3. Bulgakova M.A., Petrosyan L.A. About Strongly Time-Consistency of Core in the Network Game with Pairwise Interactions // Proceedings of 2016 International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems". Moscow, 2016. P. 157-160.
4. Kuzyutin D., Nikitina M. Time consistent cooperative solutions for multistage games with vector payoffs // Operations Research Letters. 2017. Vol. 45, No. 3. P. 269-274.
5. Петросян Л.А., Седаков А.А. Многошаговые сетевые игры с полной информацией // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, № 2ю С. 66-81.
6. Petrosyan L.A. Stability of solutions in n-person differential games // Vestnik Leningrad. Univ. 1977. Vol. 1, No. 19. P. 46-52.
7. Petrosyan L.A. About new strongly time-consistency solutions in cooperative differential games // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1995. No. 211. P. 335-340.
8. Панкратова Я.Б., Петросян Л.А. Новая характеристическая функция для многошаговых динамических игр // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14, Вып. 4. С. 316–324.
9. Булгакова М.А. Решение сетевых игр с попарным взаимодействием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 14, Вып. 1. С. 308–319.