УДК 330.45

СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ АГЕНТОВ РЫНКА ОЛИГОПОЛИИ

М.И. Гераськин
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
Россия, 430086, Самара, Московское шоссе, 34
E-mail: innovation@ssau.ru

Ключевые слова: рефлексивная игра, равновесие Курно-Нэша, лидер по Штакельбергу.

Аннотация: Рассмотрена проблема анализа рефлексивного поведения агентов рынка олигополии. Проведен сравнительный анализ равновесий в играх дуополии и триполии. Показано снижение влияния глубины рефлексии на равновесные выпуски с ростом числа рефлексирующих агентов.

1. Введение

На рынке олигополии действия агентов, максимизирующие их полезности, приводят к равновесию Нэша [1] как решению соответствующей игры. Несмотря на то, что функции полезности агентов считаются известными всем агентам, при моделировании олигополии имеет место фундаментальная проблема несовершенства информированности агента о действиях окружения. Проблема заключается в априорной неосведомленности каждого агента о том, на основе какого предположения окружение выбирает действия: предположения о неизменности действий агента, предположения о наилучшем ответе агента на действия окружения, предположения о наилучшем ответе агента на наилучший ответ окружения и т.д.

В отличие от классического подхода к разрешению этой проблемы, базирующегося на выдвижении некоторой гипотезы о поведении окружения [2,3], рефлексивный анализ [4] предоставляет более широкие возможности. Под рефлексией понимается процесс выдвижения агентом гипотез о возможных действиях окружения. Рассматривается стратегическая рефлексия, т.е. предположения агента о действиях окружения. Мерой глубины рефлексии [5] является ранг – порядковый номер представления в следующей последовательности: 1) представление агента о стратегиях окружения; 2) представление агента о представлениях окружения о стратегии агента; 3) представление агента о представлениях окружения о представлении агента о стратегиях окружения и т.д.

Модель рефлексивной игры является инструментом описания информированности агентов, с помощью которого множество представлений агентов как экзогенно заданная информированность сводится к множеству возможных игр с полной информированностью. Затем в каждой из этих игр находится решение игры агента с представляемыми (фантомными) агентами окружения. Поэтому решением рефлексивной игры является не реальное, а информационное равновесие [6] – вектор действий реальных и фантомных (существующих во мнении реальных) агентов, при котором агент максимизирует полезность исходя из своей информированности об окружении, то есть если бы окружение выбирало те действия, которые представляет этот агент. Решения всех возможных игр агента с фантомами образуют набор информационных равновесий, используемый для последующего сравнения с параметрами реальных рынков с целью оценки ранга рефлексии реальных агентов.

2. Постановка задачи рефлексивной игры

Рассматривается линейная модель рынка олигополии, в которой задана обратная функция спроса в виде линейной функции общего объема предложения, функции издержек агентов линейные с различными для всех агентов коэффициентами предельных и постоянных издержек. Агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли)

(1) $$\Pi_i(Q,Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i), Q_i \geq 0, i \in N = \{1,...,n\}$$

при линейной обратной функции спроса

(2) $$P(Q) = a - bQ, a,b > 0\ ,\ Q = \sum_{i \in N} Q_i\ ,$$

и линейных функциях издержек

(3) $$C_i(Q_i) = d + cQ_i\ , c,d > 0, c < a, i \in N\ ,$$

где Q_i, Π_i – выпуск и прибыль i-го агента; N – множество агентов рынка; n – количество агентов; P, Q – равновесная цена и суммарный объем рынка; c, d – коэффициенты функций издержек агентов; a,b – коэффициенты обратной функции рыночного спроса.

Модели выбора оптимальных (обозначены символом «*») действий агентов с учетом условий (1)-(3) запишем в виде:

(4) $$Q_i^* = \arg \max_{Q=\sum_{i \in N} Q_i} \Pi_i(Q,Q_i) = \arg \max_{Q=\sum_{i \in N} Q_i} \{(a - bQ)Q_i - d - cQ_i\}, i \in N\ .$$

Равновесие Нэша в системе агентов с моделями (4) представляет собой вектор оптимальных действий агентов при выбранных действиях окружения и определяется путем решения системы уравнений реакций следующего типа (при заданном векторе предположительных вариаций):

(5) $$\frac{\partial \Pi_i(Q_i, \rho_{ij})}{\partial Q_i} = 0, i, j \in N\ ,$$

где $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$ – предположительная вариация в уравнении реакции i-го агента, то есть предполагаемое изменение выпуска j-го агента в ответ на единичный прирост выпуска i-го агента.

Будем считать, что агенты на каждом ранге рефлексии могут иметь представления о наилучших стратегиях окружения, а также о представлениях окружения. В этом случае представляемая иерархия агентов имеет вид множества

(6) $$G = \{M_0, M_1, ..., M_l\}, M_m \cap M_j = \varnothing \forall m \neq j, M_0 \cup M_1 \cup ... \cup M_l = N\ ,$$

где l – количество уровней лидерства агентов; $M_m, m = 0,...,l$ – множества агентов (при $m>0$ множества лидеров m-го уровня).

Элементарное стратегическое представление G_{ij}^r, т.е. представление i-го агента на r-м ранге рефлексии о стратегии j-го агента окружения, может быть [7] двух видов:

1) представление о F-стратегии (стратегии ведомого агента), т.е. о выборе η_0-м агентом окружения действия по (4) без учета действий окружения согласно гипотезе Курно, в результате данный агент имеет в множестве (6) уровень M_0; при этом в η_0-м уравнении системы (5) полагается $\rho_{\eta_0 j} = 0 \forall j \in N \setminus \eta_0$;

2) представление о L-стратегии (стратегии лидера по Штакельбергу), т.е о выборе η_1-м агентом окружения действия по модели (4) в предположении, что окружение придерживается F-стратегии, в результате данный агент имеет уровень M_1; при этом в η_0-м уравнении системы (5) $\rho_{\eta_1 j}$ вычисляется дифференцированием по Q_{η_1} остальных (N-1) уравнений (5), в которых полагается $\rho_{ij} = 0 \forall j \in N \setminus i$.

Поэтому

(7) $$G_{ij}^r = F \vee G_{ij}^r = L \forall j \in N \setminus i .$$

Если множество возможных рефлексивных представлений агентов (7) на r-м ранге рефлексии свести к набору множеств уровней лидерства (6) на первом ранге рефлексии, рефлексивная игра есть множество игр с полной информированностью вида

(8) $$\Gamma = \left\langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, G^1 \right\rangle,$$

где G^1 – система представлений всех агентов о принципах выбора действий окружением на первом ранге рефлексии в виде (6).

3. Анализ стратегической рефлексии

В модели дуополии (n=2, агенты обозначены индексами $i, j \in N$), система возможных представлений (7) агентов имеет вид [8], приведенный в табл. 1 и на рис. 1. Случаи соотношения представлений агентов на r-м ранге рефлексии описаны в табл. 1, где использованы обозначения: $Q_{i(\mathrm{II})}^{Er}$ – равновесные выпуски агентов дуополии (модель II) на r-м ранге, $\alpha = \dfrac{a-c}{b}$. На рис. 1-3 использована следующая символика: ○ – агент; □ – представляемая агентом стратегия окружения; → – представления i-го агента; – → – представления j-го агента.

Таблица 1. Анализ стратегической рефлексии в дуополии.

Параметры	**Случай τ=1**	**Случай τ=2**	**Случай τ=3**
Формула	$G_{ij}^r = F \wedge G_{ji}^r = F$	$G_{ij}^r = L \wedge G_{ji}^r = L$	$G_{ij}^r = F \wedge G_{ji}^r = L$
Характеристика	агенты представляют окружение ведомыми	агенты представляют окружение лидерами	один агент представляет контрагента ведомым, а другой – лидером
$Q_{i(\mathrm{II})}^{Er}$, $Q_{j(\mathrm{II})}^{Er}$	$\dfrac{r+2}{2r+5}\alpha$, $\dfrac{r+2}{2r+5}\alpha$	$\dfrac{r+1}{2r+3}\alpha$, $\dfrac{r+1}{2r+3}\alpha$	$\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{r+1}{2r+4}\alpha$

Функции выпусков имеют вид $Q_{\eta(\mathrm{II})}^{Er}(r) = \alpha \dfrac{r+\chi_1}{\chi_2 r + \chi_3}, \eta = i, j, \chi_2 > \chi_1 > 0, \chi_3 > \chi_1\chi_2$, значит

(9) $$\frac{\partial Q_{\eta(\mathrm{II})}^{Er}}{\partial r} = \alpha \frac{\chi_3 - \chi_1\chi_2}{(\chi_2 r + \chi_3)^2} = \alpha \frac{P^0(r)}{P^2(r)} > 0 ,$$

где символом $P^m(\bullet)$ обозначен полином m-й степени. Следовательно, равновесные выпуски агентов нелинейно возрастают от ранга рефлексии, а темп роста снижается.

В модели триполии (n=3, агенты обозначены индексами i,j,k) исследованы случаи одного рефлексирующего агента [9] (рис. 2) и двух рефлексирующих агентов [10] (рис.

3). Равновесные выпуски агентов триполии (модель III) на r-м ранге вычисляются по формуле

(10) $$Q^{Er}_{\eta(\mathrm{III})} = \frac{\alpha}{\Delta_{(\mathrm{III})}} \prod_{\zeta \in N \setminus \eta} \left(1+\gamma^r_{t\zeta}\right),\ \Delta_{(\mathrm{III})} = 4 + 3\sum_{\zeta \in N} \gamma^r_{t\zeta} + 2\sum_{\zeta \in N} \prod_{\mu \in N \setminus \zeta} \gamma^r_{t\mu} + \prod_{\zeta \in N} \gamma^r_{t\zeta}, \eta = i, j, k,$$

где $\gamma^r_{t\zeta}$ выбирается из табл. 2 для случая t (или τ для двух рефлексирующих агентов) и агента η.

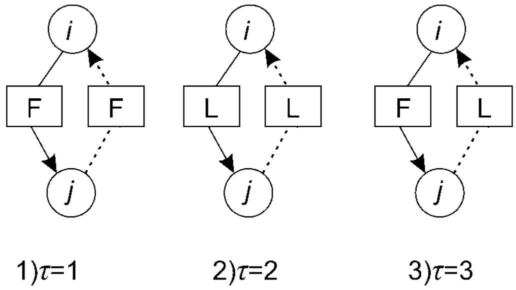

Рис. 1. Схема представлений агентов в дуополии (модель II).

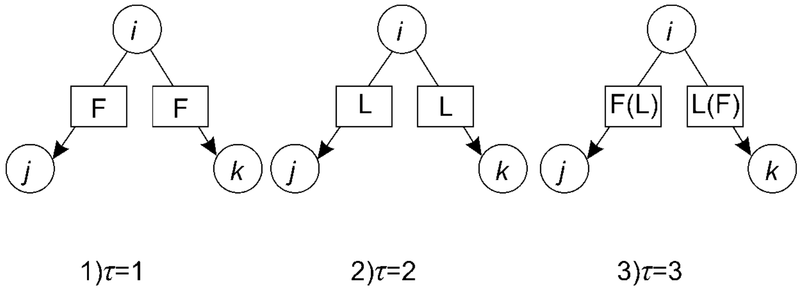

Рис. 2. Схема представлений одного рефлексирующего агента в триполии (модель III-1).

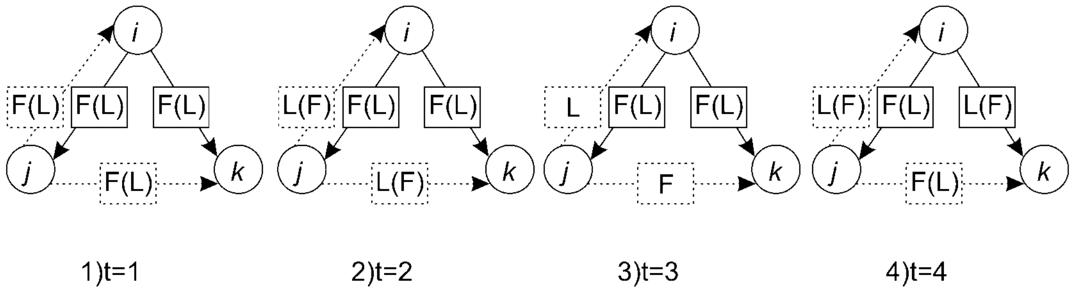

Рис. 3. Схема представлений двух рефлексирующих агентов в триполии (модель III-2).

Элементы таблицы 2 рассчитаны по следующим рекуррентным формулам:

$$\gamma^F_0 = 0, \gamma^F_r = -\frac{1}{3+2\gamma^F_{r-1}}, \gamma^L_r = -\frac{1}{3+2\gamma^F_r},\ \gamma^{FL}_r = -\frac{1+\gamma^F_{r-1}+\gamma^F_r}{3+4\gamma^F_r+4\gamma^F_{r-1}+4\gamma^F_r\gamma^F_{r-1}},$$

аппроксимация которых с коэффициентом детерминации, равным 1, дает:

(11) $$\gamma^F_r = -\frac{g_1(r-1)}{g_1(r)}, \gamma^L_r = -\frac{g_1(r)}{g_1(r+1)},\ \gamma^{FL}_r = -\frac{g_2(r-1)}{g_2(r)},$$

где использованы полиномы[1] $g_1(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}x+1$, $g_2(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x+2$.

В триполии для случая одного (i-го) рефлексирующего агента $\Delta_{(\text{III-1})}=4+3\gamma_{ti}^r=P^0(r)+P^2(r)/P^3(r)$, поэтому с учетом (10), (11) темп роста выпуска этого агента, например, при τ=2, равен[2]:

(12) $$\frac{\partial Q_{i(\text{III-1})}^{Er}}{\partial r}=\frac{3\alpha}{\Delta_{(\text{III-1})}^2}\frac{g_1^{/}(r)g_1(r+1)-g_1(r)g_1^{/}(r+1)}{[g_1(r+1)]^2}=\frac{P^5(r)}{P^6(r)}>0.$$

В случае двух (i, j) рефлексирующих агентов $\Delta_{(\text{III-2})}=4+3(\gamma_{ti}^r+\gamma_{tj}^r)+2\gamma_{ti}^r\gamma_{tj}^r=(P^0(r)+P^2(r)/P^3(r))^2$, поэтому темп роста выпуска i-го агента при τ=2, по аналогии с (12), равен:

(13) $$\frac{\partial Q_{i(\text{III-2})}^{Er}}{\partial r}=\frac{\alpha}{\Delta_{(\text{III-2})}^2}\left\{\left[\Delta_{(\text{III-2})}-(1+\gamma_j^r)\frac{\partial\Delta_{(\text{III-2})}}{\partial\gamma_j^r}\right]\frac{\partial\gamma_j^r}{\partial r}-(1+\gamma_j^r)\frac{\partial\Delta_{(\text{III-2})}}{\partial\gamma_i^r}\frac{\partial\gamma_i^r}{\partial r}\right\}=\frac{P^7(r)}{P^9(r)}>0.$$

Из (9), (12), (13) следует, что, $\frac{\partial Q_{i(\text{III-1})}^{Er}}{\partial r}>\frac{\partial Q_{i(\text{III-2})}^{Er}}{\partial r}$ а также $\frac{\partial Q_{i(\text{II})}^{Er}}{\partial r}>\frac{\partial Q_{i(\text{III})}^{Er}}{\partial r}$ при $r<r^*$ и $\frac{\partial Q_{i(\text{II})}^{Er}}{\partial r}<\frac{\partial Q_{i(\text{III})}^{Er}}{\partial r}$ при $r>r^*$. Следовательно, увеличение числа рефлексирующих агентов приводит к снижению темпа роста выпуска с ростом ранга, а увеличение общего числа агентов понижает влияние рефлексии при малых рангах, и повышает – при больших.

Таблица 2. Анализ стратегической рефлексии в триполии и значения параметра $\gamma_{t\zeta}$.

Параметры		**Случай t=1**		**Случай t=2**	**Случай t=3**		**Случай t=4**
		τ=1	**τ=2**				**τ=3**
$G_{i(-i)}^r$		$F\wedge F$	$L\wedge L$	$(F\wedge F)\vee(L\wedge L)$	$F\wedge F$	$L\wedge L$	$(F\wedge L)\vee(L\wedge F)$
$G_{j(-j)}^r$		$F\wedge F$	$L\wedge L$	$(L\wedge L)\vee(F\wedge F)$	$L\wedge F$	$L\wedge F$	$(L\wedge F)\vee(F\wedge L)$
η	***i***	$\gamma_{1i}=2\gamma_r^F$	$\gamma_{1i}=2\gamma_r^L$	$\gamma_{2i}=2\gamma_r^F\vee 2\gamma_r^L$	$\gamma_{3i}=2\gamma_r^F$	$\gamma_{3i}=2\gamma_r^L$	$\gamma_{4i}=2\gamma_r^{FL}$
	j	$\gamma_{1j}=2\gamma_r^F\vee 0^*$	$\gamma_{1j}=2\gamma_r^L\vee 0^*$	$\gamma_{2j}=2\gamma_r^L\vee 2\gamma_r^F$	$\gamma_{3j}=2\gamma_r^{FL}$	$\gamma_{3j}=2\gamma_r^{FL}$	$\gamma_{4j}=2\gamma_r^{FL}\vee 0^*$
	k	0	0	0	0	0	0

*В модели III-1.

Список литературы

1. Nash J. Non-cooperative Games// Annals of Mathematics. № 195154. P 286-295.
2. Cournot A.A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960.
3. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011 (Original 1934)
4. Lefebvre V. Lectures on the Reflexive Games Theory. N.Y.: Leaf & Oaks Publishers, 2010.
5. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.

[1] Аппроксимируемые ряды имеют вид 1, 3, 7, 15 ..., поскольку $\gamma_1^F=-1/3,\gamma_2^F=-3/7,\gamma_3^F=-7/15$, $\gamma_1^L=-3/7,\gamma_2^L=-7/15$, или 2, 5, 11, 23,..., поскольку $\gamma_1^{FL}=-2/5,\gamma_2^{FL}=-5/11,\gamma_3^{FL}=-11/23$.

[2] Производная положительна, т.к. $g_1(r+1)>g_1(r)>>g_1^{/}(r)$.

6. Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A. Reflexion in mathematical models of decision-making // International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems. 2018. № 33 (3). P. 319-335.
7. Geraskin M. I. Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market// Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79, No. 5. P. 841-859.
8. Geraskin M. I. Game-theoretic analysis of Stackelberg oligopoly with arbitrary rank reflexive behavior of agents // Kybernetes. 2017. Vol. 46, No. 6. P. 1052-1067.
9. Бирюкова И. А., Гераськин М. И. Структурный анализ рынка олигополии на основе модели рефлексивной игры на примере телекоммуникационного рынка России // Актуальные проблемы экономики и права. 2017. Т. 11, № 4. С. 24-39.
10. Гераськин М.И., Бирюкова И.А. Анализ рефлексивной игры агентов на телекоммуникационном рынке для случая двух рефлексирующих агентов // Актуальные проблемы экономики и права. 2018. Т. 12, № 3. С. 468-480.