УДК 519.865

ДВЕ ИГРЫ С ОШИБКАМИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ИНФОРМАЦИИ

М.А. Горелов
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН
Россия, 119333, Москва, Вавилова ул., 40
E-mail: griefer@ccas.ru

Ключевые слова: иерархические игры, максимальный гарантированный результат, информация.

Аннотация: Рассматриваются две иерархически игры с ошибками при передаче информации. В одной из них оба игрока предполагаются осторожными по отношению к неопределенности, возникающей в результате наличия этих ошибок. Во второй ошибки считаются случайными, и предполагается, что игроки ориентируются на математические ожидания своих выигрышей.

1. Введение

Иерархические игры с ошибками при передаче информации уже исследованы в [1, 2]. В этих статьях предполагается, что игрок нижнего уровня ведет себя так, как будто этих ошибок вовсе нет. Это не единственное возможное и, вероятно, не самое естественное предположение. В данной работе показывается, что можно использовать и другие гипотезы. При этом техника исследования получающихся моделей остается практически той же.

Обычно иерархические игры исследуются с позиций игрока верхнего уровня. При этом отношение этого игрока к неопределенности задается оперирующей стороной. Оценка отношения второго игрока к неопределенности доставляет дополнительные трудности. Но эти трудности возникают лишь на этапе построения модели.

Осмысленные постановки задач с ошибками при передаче информации получаются, только если наложить ограничения на объем передаваемой информации. С описания этой модели мы и начнем.

2. Игра с конечным объемом передаваемой информации

Будем рассматривать игру двух лиц $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, где U и V – компактные метрические пространства, а g и h – непрерывные функции из $U \times V$ множество действительных чисел **R**. Элементы множеств U и V интерпретируются как управления первого и второго игроков. Их интересы описываются стремлением к максимизации значений функций g и h соответственно.

Рассмотри следующую схему взаимодействия игроков. Первый игрок вправе задать партнеру n вопросов относительно выбранного им управления $v \in V$ и получить на них правдивые ответы. Каждый из этих вопросов должен допускать ответ «да» или «нет». Следуя традиции, будем кодировать ответ «да» единицей, а ответ «нет» – нулем.

Окончательный выбор своего управления $u \in U$ первый игрок осуществляет после получения ответов на свои вопросы. Однако он заранее выбирает список вопросов и план своих действий при всех возможных вариантах ответов. Эта информация становится известной второму игроку. В этих условиях второй игрок может однозначно соотнести свой выигрыш с выбором своего управления, а потому его поведение становится предсказуемым: он будет выбирать управления из условия максимума своего критерия. Неопределенность остается лишь в том случае, когда точек максимума несколько. Будем считать, что первый игрок осторожен по отношению к этой неопределенности и стремится максимизировать свой гарантированный результат.

Дадим точные определения. Каждой системе из n вопросов рассматриваемого типа соответствует набор из $2n$ подмножеств

(1) $$\left(X_1^0, X_1^1\right), \left(X_2^0, X_2^1\right), \ldots, \left(X_n^0, X_n^1\right)$$

пространства V, разбитый на пары. В множество X_t^1 входят те и только те управления $v \in V$ второго игрока, при выборе которых на вопрос с номером t следует ответить «да». В множество X_t^0 входят те управления, которые соответствуют ответу «нет» на вопрос с номером t. Разумеется, должны выполняться условия

(2) $$X_t^0 \bigcap X_t^1 = \varnothing,\ X_t^0 \bigcup X_t^1 = V,\ t = 1, \ldots, n.$$

Каждому булеву вектору $r = \left(r_1, r_2, \ldots, r_n\right)$ из множества $N = \{0,1\}^n$ можно поставить в соответствие множество $X^r = \bigcap\limits_{t=1}^{n} X_t^{r_t}$. Получив ответы $\left(r_1, r_2, \ldots, r_n\right)$ на свои вопросы, первый игрок может и должен выбрать управление $u^r \in U$. Таким образом, стратегия первого игрока определяется заданием $2n$ множеств вида (1), удовлетворяющих условиям (2), и $m = 2^n$ управлений $u^r \in U,\ r \in N$. В дальнейшем иногда будет удобно отождествить вектор $\left(r_1, r_2, \ldots, r_n\right) \in N$ с натуральным числом $r_1 \cdot 2^{n-1} + r_2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + r_n \cdot 2^0$ из множества $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, для которого последовательность $r_1 r_2 \ldots r_n$ является записью в двоичной системе счисления. Такое отождествление не должно вызвать недоразумений и потому будет делаться без особых оговорок.

Если первый игрок зафиксировал свою стратегию такого вида, а второй игрок выберет управление $v \in V$, то игроки получат выигрыши $g(u^r, v)$ и $h(u^r, v)$ соответственно, где ответ r однозначно определяется условием $v \in X^r$.

Удобно определить функцию $P : V \to N$ условием $P(v) = r$, если $v \in X^r$ и такую функцию $u_* : N \to U$, что $u_*(r) = u^r$. Тогда стратегию первого игрока можно отождествить с парой функций $\left(u_*, P\right)$, а выигрыши игроков будут определяться функционалами $g_*((u_*, P), v) = g(u_*(P(v)), v)$ и $h_*((u_*, P), v) = h(u_*(P(v)), v)$.

3. Игра с осторожным вторым игроком

Предположим, что при передаче информации часть ответов может быть искажена. Будем считать, что игроки не могут знать, какие именно ответы являются неверными, но им известно, что число неверных ответов не превосходит l. Очевидно, интересен случай $l < n$.

Сказанное формализуется соответствующим определением максимального гарантированного результата. Зададим расстояние Хэмминга на множестве N условием

$$\chi(r,b)=\sum_{i=1}^{n}\left|r_i-b_i\right|$$

для векторов $r=\left(r_1,r_2,...,r_n\right)$ и $b=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ из N. Будем называть звездой вектора $r\in N$ множество

$$S_l(r)=\left\{b\in N: \chi(r,b)\le l\right\}.$$

Определим множество рациональных ответов второго игрока на стратегию (u_*,P) следующим образом. Фиксируем положительное число κ. Множество $B_l^c(u_*,P)$ рациональных ответов второго игрока определяется условиями

- $B_l^c\left(u_*,P\right)=\left\{v\in V: \min\limits_{r\in S_l(P(v))} h(u_*(r),v)=\max\limits_{w\in V}\min\limits_{r\in S_l(P(w))} h(u_*(r),w)\right\}$, если верхняя грань $\min\limits_{r\in S_l(P(w))}\sup\limits_{w\in V} h(u_*(P(w)),w)$ достигается;
- $B_l^c\left(u_*,P\right)=\left\{v\in V: \min\limits_{r\in S_l(P(v))} h(u_*(P(v)),v)\ge\max\limits_{w\in V}\min\limits_{r\in S_l(P(w))} h(u_*(P(w)),w)-\kappa\right\}$ в противном случае.

Максимальный гарантированный результат первого игрока в таком случае будет равен

$$R=\sup\inf_{v\in B(u_*,P)}\min_{r\in S_l(P(v))} g(u_*(r),v),$$

где верхняя грань берется по множеству всех его стратегий.

Справедлива

Лемма 1. *Для любой стратегии $\left(w_*,Q\right)$ первого игрока найдется такая стратегия $\left(u_*,P\right)$, что $\inf\limits_{v\in B(u_*,P)}\min\limits_{r\in S_l(P(v))} g(u_*(r),v)\ge\inf\limits_{v\in B(w_*,Q)}\min\limits_{r\in S_l(Q(v))} g(w_*(r),v)$ и верхняя грань $\sup\limits_{v\in V}\min\limits_{r\in S_l(P(v))} h(u_*(r),v)$ достигается.*

Поэтому, если существует стратегия (u_*,P), гарантирующая первому игроку получение выигрыша большего γ, то существуют такие управления $u^0\in U,\, u^1\in U,...,u^{m-1}\in U$ и число λ, что, во-первых,

- найдется такое управление $v\in V$, что для любого сообщения $b\in S_l(r)$ имеют место неравенства $h(u^b,v)\ge\lambda$ и $g(u^b,v)>\gamma$;

а, во-вторых, для любого $v\in V$ выполняется одно из двух условий:

- найдется такое $r\in N$, что для любого $b\in S_l(r)$ справедливы неравенства $h(u^b,v)\ge\lambda$ и $g(u^b,v)>\gamma$;
- найдется такое $r\in N$, для которого $h(u^r,v)<\lambda$.

Тогда величина

$$c_l^c(\gamma)=\sup_{u^0\in U}\sup_{u^1\in U}...\sup_{u^{m-1}\in U}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\min\left\{\sup_{v\in V}\max_{r\in N}\min_{b\in S_l(r)}\left[h(u^b,v)-\lambda,\ g(u^b,v)-\gamma\right],\right.$$

$$\left.\inf_{v\in V}\max\left[\max_{r\in N}\min_{b\in S_l(r)}\min\left(h(u^b,v)-\lambda,\ \min_{b\in S_l(r)} g(u^b,v)-\gamma\right),\max_{r\in N}\left(\lambda-h(u^r,v)\right)\right]\right\}$$

будет неотрицательна.

Если величина строго больше нуля, то используя реализации внешних верхних граней в ее определении можно построить стратегию (u_*, P), которая гарантирует первому игроку выигрыш больший γ.

Поэтому справедлива

Теорема 1. *Максимальный гарантированный результат* R_l^c *первого игрока в рассматриваемой игре является решением уравнения* $c_l^c(\gamma) = 0$.

4. Игра с риск-нейтральным вторым игроком

Предположим, что ошибки при передаче информации возникают случайно. Дабы не усложнять формулы, будем считать, что ответ на любой из вопросов с вероятностью p может быть искажен, и все эти события статистически независимы в совокупности.

Пусть все это известно игрокам и они готовы ориентироваться на математическое ожидание своего выигрыша. Первый игрок, по прежнему, осторожен по отношению к неопределенности выбора своего партнера.

Если первый игрок зафиксирует свою стратегию (u_*, P), а второй игрок выберет управление v, то математическое ожидание выигрыша второго игрока будет равно

$$\tilde{h}(u_*, P, v) = \sum_{r\in N} p^{\chi(r,P(v))}(1-p)^{n-\chi(r,P(v))} h(u_*(r), v).$$

Поэтому множество рациональных ответов второго игрока на стратегию (u_*, P) будет определяться следующим образом.

Фиксируем положительное число κ. Множество $B^p(u_*, P)$ зададим условиями

- $B^p\left(u_*, P\right) = \left\{ v \in V : \tilde{h}(u_*, P, v) = \max_{w\in V} \tilde{h}(u_*, P, w) \right\}$, если верхняя грань $\sup_{w\in V} \tilde{h}(u_*, P, w)$ достигается;
- $B^p\left(u_*, P\right) = \left\{ v \in V : \tilde{h}(u_*, P, v) \ge \sup_{w\in V} \tilde{h}(u_*, P, w) - \kappa \right\}$ в противном случае.

Максимальный гарантированный результат первого игрока в этой игре определяется формулой

$$R^{pp} = \sup \inf_{v\in B^p(u_*,P)} \sum_{r\in N} p^{\chi(r,P(v))}(1-p)^{n-\chi(r,P(v))} g(u_*(r), v),$$

где верхняя грань берется по всем стратегиям (u_*, P) первого игрока.

При фиксированной стратегии (u_*, P) функция $\tilde{h}(u_*, P, v)$ непрерывна на каждом из множеств $X^r = \left\{ v \in V : P(v) = r \right\}$. Поэтому справедлива

Лемма 2. *Для любой стратегии* $\left(w_*, Q\right)$ *первого игрока найдется такая стратегия* $\left(u_*, P\right)$*, что*

$$\inf_{v\in B^p(u_*,P)} \sum_{r\in N} p^{\chi(r,P(v))}(1-p)^{n-\chi(r,P(v))} g(u_*(r), v) \ge$$

$$\ge \inf_{v\in B^p(w_*,Q)} \sum_{r\in N} p^{\chi(r,Q(v))}(1-p)^{n-\chi(r,Q(v))} g(w_*(r), v)$$

и верхняя грань $\sup_{w\in V} \tilde{h}(u_*, P, w)$ *достигается.*

Как следствие можно утверждать, что если существует стратегия (u_*, P), гарантирующая первому игроку получение выигрыша большего γ, то существуют такие управления $u^0 \in U,\ u^1 \in U, ..., u^{m-1} \in U$ и число λ, что, во-первых,

- найдутся такие управление $v \in V$ и сообщение $r \in N$, для которых имеют место условия $\Psi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) = \lambda$ и $\Phi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) > \gamma$;

а, во-вторых, для любого $v \in V$ найдется такое $r \in N$, что выполняется одно из двух условий:

- $\Psi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) \geq \lambda$ и $\Phi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) > \gamma$;
- $\Psi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) < \lambda$,

где использованы обозначения

$$\Phi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) = \sum_{b \in N} p^{\chi(r,b)} (1-p)^{n-\chi(r,b)} g(u^b, v),$$

$$\Psi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) = \sum_{b \in N} p^{\chi(r,b)} (1-p)^{n-\chi(r,b)} h(u^b, v).$$

Тогда величина

$$c^{pp}(\gamma) = \sup_{u^0 \in U} \sup_{u^1 \in U} ... \sup_{u^{m-1} \in U} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \min$$

$$\Big\{ \sup_{v \in V} \max_{r \in N} \min \left[\Psi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) - \lambda,\ \Phi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) - \gamma \right],$$

$$\inf_{v \in V} \max_{r \in N} \max \Big[\min \Big(\Psi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) - \lambda),\Phi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) - \gamma \Big),$$

$$\Big(\lambda - \Psi(p, r, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, v) \Big) \Big] \Big\}$$

будет неотрицательна.

Если величина $c^{pp}(\gamma)$ положительна, то, зная реализации верхних граней в ее определении, можно конструктивно определить стратегию (u_*, P), гарантирующую первому игроку выигрыш больший γ.

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Максимальный гарантированный результат* R^{pp} *первого игрока в рассматриваемой игре является решением уравнения* $c^{pp}(\gamma) = 0$.

Список литературы

1. Горелов М.А. Игра с ошибками при передаче информации // Автоматика и телемеханика. 2012. № 12. С. 137-152.
2. Горелов М.А. Игры со случайными ошибками при передаче информации // Автоматика и телемеханика. 2015. № 12. С. 135-153.