УДК 519.834

РАСШИРЕНИЕ МНОЖЕСТВА УСТОЙЧИВЫХ КОАЛИЦИОННЫХ СТРУКТУР

Е.М. Парилина
Санкт-Петербургский государственный университет,
Школа математики и статистики, Университет Циндао
Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9,
Китай, Циндао 266071
E-mail: e.parilina@spbu.ru

Ф. Сунь
Школа математики и статистики, Университет Циндао,
Санкт-Петербургский государственный университет
Китай, Циндао 266071,
Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9
E-mail: sunfengyan1212@outlook.com

Х. Гао
Школа математики и статистики, Университет Циндао
Китай, Циндао 266071
E-mail: gaohongwei@qdu.edu.cn

Ключевые слова: коалиционная структура, устойчивость, вектор Ауманна-Дрезе, ES-значение.

Аннотация: В работе рассматривается проблема устойчивости коалиционных структур, которые являются разбиением множества игроков на непересекающиеся коалиции. Заданная характеристическая функция может не удовлетворять свойству супераддитивности. Под устойчивой структурой понимается та, индивидуальное отклонение от которой не принесет никому из игроков увеличения выигрыша. Как было показано ранее, устойчивая коалиционная структура существует в играх трех лиц, но не существует в произвольной игре четырех лиц. Проводится расширение множества устойчивых коалиционных структур путем введения ограничения на допустимые отклонения игроков. Предполагается, что игрок при отклонении от коалиции, которой он принадлежит, не может присоединиться к тем коалициям, в которых выигрыши игроков могут уменьшиться в результате присоединения этого игрока. Исследуются некоторые классы игр, для которых находятся устойчивые коалиционные структуры при ограниченных отклонениях игроков.

1. Введение

Понятие устойчивой коалиционной структуры, когда любые отклонения игроков допустимы, вводится в [1,11]. Существование устойчивой коалиционной структуры в игре трех лиц доказано в [11]. Существование устойчивой коалиционной структуры в играх четырех лиц специального вида и отсутствие таковой в произвольной игре четырех лиц доказано в [13]. В настоящей работе определение устойчивой коалиционной структуры модифицировано, теперь оно учитывает ограничения при отклонениях игроков. Игрок не может присоединиться к другой коалиции, если выигрыш какого-либо игрока этой коалиции уменьшается при присоединении нового игрока. Другие подходы к определению устойчивых коалиционных структур предлагаются в статьях [5,8].

В случае, если задана коммуникационная структура в виде графа, ограничивающая кооперацию игроков, также может быть определена устойчивая коалиционная структура [10]. Задача нахождения стабильных по Нэшу разбиений сети [3] схожа с задачей определения устойчивых коалиционных структур. В статье [7] изучается проблема построения кооперативной игры на основе формируемого игроками графа и динамической устойчивости с-ядра.

В статьях [1,4,9] рассматривается игра распределения издержек между банками, которые могут объединять свои банкоматы в общую сеть. В работах [1, 9] найдены условия устойчивости некоторых коалиционных структур. В настоящей работе игра распределения издержек также рассматривается в качестве примера, для этой игры находятся некоторые устойчивые коалиционные структуры при ограниченных отклонениях игроков.

2. Устойчивые коалиционные структуры при ограниченных отклонениях игроков

Пусть задана игра (N, v, π) с коалиционной структурой π, где N — конечное множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция, $S \subseteq N$ — коалиция, π есть разбиение $\{B_1, \dots, B_m\}$ множества N, т. е. $B_1 \cup \dots \cup B_m = N$, и $B_i \cap B_j = \varnothing$ для всех i, $j = 1, \dots, m$, $i \neq j$. Мы не требуем выполнения свойства супераддитивности характеристической функции.

Определение 1. *Вектор $x^\pi = (x_1^\pi, \dots, x_n^\pi) \in \mathbb{R}^n$ — распределение выигрыша в игре (N, v, π) с коалиционной структурой π, если выполнено условие эффективности: равенство $\sum_{i \in B_j} x_i^\pi = v(B_j)$ справедливо для всех множеств $B_j \in \pi$, $j = 1, \dots, m$.*

Определение 2. *Распределение выигрыша x^π называется дележом в игре (N, v, π) с коалиционной структурой π, если выполнено условие индивидуальной рациональности: неравенство $x_i^\pi \geqslant v(\{i\})$ справедливо для любого игрока $i \in N$.*

Пусть $\pi_{-B_i} = \pi \setminus B_i \subset \pi$ и $B(i) \in \pi$ — коалиция, содержащая игрока $i \in N$.

Определение 3. *Коалиционная структура $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$ называется устойчивой относительно одноточечного кооперативного решения при ограниченных отклонениях игроков, если для любого игрока $i \in N$ справедливо неравенство*

$$x_i^\pi \geqslant x_i^{\pi''} \quad \text{для всех} \quad \pi'' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i) \cup B_j}\},$$
$$\text{и} \quad x_k^{\pi''} \geqslant x_k^\pi \quad \text{для всех} \quad k \in B_j,$$

где $B_j \in \pi \cup \varnothing$, $B_j \neq B(i)$, и x^π и $x^{\pi''}$ — распределения выигрышей, рассчитанные по одному и тому же решению в играх (N, v, π) и (N, v, π'') с коалиционными структурами π, π'' соответственно.

В качестве решения кооперативной игры мы рассмотрим вектор Шепли [12] и ES-значение [6]. В игре (N, v, π) с коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ вектор Шепли $\phi^\pi = (\phi^\pi_1, \ldots, \phi^\pi_n)$ известный также как вектор Ауманна–Дрезе [2], компоненты которого могут быть вычислены по формуле:

$$\phi^\pi_i = \sum_{\substack{i \in S \\ S \subseteq B(i)}} \frac{(|B(i)| - |S|)!(|S| - 1)!}{|B(i)|!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] \tag{1}$$

для всех $i \in N$.

Компоненты ES-значения могут быть вычислены по формуле:

$$\psi^\pi_i = v(\{i\}) + \frac{v(B(i)) - \sum_{j \in B(i)} v(\{j\})}{|B(i)|} \tag{2}$$

для всех $i \in N$.

В работе рассматриваются специальные кооперативные игры: простая игра, игра большинства, игра с характеристической функцией $v(S) = a \ln s$, где $a \in \mathbb{R}^+$. Для всех этих игр изучены множества устойчивых коалиционных структур при ограниченных отклонениях игроков.

3. Игра банковской кооперации

В качестве примера игры с коалиционной структурой рассмотрим одну игру банковской кооперации. Пусть N — конечное множество банков. На рассматриваемой территории банки размещают свои банкоматы. Предполагается, что если у банка на территории присутствуют банкоматы, то для снятия наличных денег клиенты этого банка используют только банкоматы. Два банка и более могут объединить свои банкоматы в единую сеть, тогда клиенты этих банков для снятия наличных денег используют банкоматы сети с равными вероятностями.

Издержки банка на разовое обслуживание своего клиента посредством банкомата равны $\alpha > 0$. Издержки банка на разовое обслуживание клиента посредством банкомата другого банка, объединенного с первым в общую сеть, равны $\beta > \alpha$. В остальных случаях издержки банка на разовое обслуживание клиента равны $\gamma > \beta$. Пусть издержки α, β и γ одинаковы для всех банков. Банк i имеет две характеристики: $n_i > 0$ — количество транзакций банка $i \in N$, $k_i \geqslant 0$ — количество банкоматов, которые банк $i \in N$ разместил на рассматриваемой территории.

Для коалиции S величина $n(S) = \sum_{i \in S} n_i$ представляет собой общее количество транзакций банков из S, а величина $k(S) = \sum_{i \in S} k_i$ — общее количество банкоматов на рассматриваемой территории, принадлежащих банкам из S.

Пусть $A \subseteq N$ — множество банков, имеющих на рассматриваемой территории свои банкоматы. Для некоторой непустой коалиции S суммарные затраты, которые несут банки из коалиции S, связанные со снятием наличных, имеют вид:

$$c(S) = \begin{cases} \alpha \sum\limits_{i \in S} \dfrac{k_i}{k(S)} n_i + \beta \sum\limits_{i \in S} \left(1 - \dfrac{k_i}{k(S)}\right) n_i, & \text{если } S \cap A \neq \varnothing, \\ \gamma n(S), & \text{если } S \cap A = \varnothing. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда характеристическая функция игры v определяется следующим образом:

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S) = \tag{4}$$

$$= \begin{cases} (\gamma - \beta) \sum\limits_{i \in S \setminus A} n_i - (\beta - \alpha) \sum\limits_{i \in S \cap A} \left(1 - \dfrac{k_i}{k(S)}\right) n_i, & \text{если } S \cap A \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } S \cap A = \varnothing, \end{cases}$$

где $v(S)$ представляет собой суммарные издержки банков из этой коалиции, которые они экономят при объединении своих банкоматов в общую сеть.

В работе рассматриваются некоторые специальные коалиционные структуры в игре банковской кооперации и находятся условия, при которых эти структуры устойчивы при ограниченных отклонениях игроков.

4. Заключение

В работе вводится понятие устойчивой коалиционной структуры при ограниченных отклонениях игроков. Исследуются разные кооперативные игры, в которых находятся устойчивые коалиционные структуры при ограниченных отклонениях игроков. Также рассматривается одна игра банковской кооперации, для которой также приводятся условия устойчивости некоторых коалиционных структур при ограниченных отклонениях игроков-банков.

Работа первого автора поддержана грантом провинции Шаньдун (Shandong Province) “Double-Hundred Talent Plan” (No. WST2017009). Работа третьего автора поддержана Национальным фондом естественных наук Китая, National Natural Science Foundation of China (No. 71571108).

Список литературы

1. Парилина Е.М., Седаков А.А. Устойчивость коалиционных структур в одной модели банковской кооперации // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, № 4. С. 45-62.
2. Aumann R.J., Dreze J.H. Cooperative Games with Coalition Structures // International Journal of Game Theory. 1974. Vol. 3. P. 217-237.
3. Avrachenkov K.E., Kondratev A.Y, Mazalov V.V., Rubanov D.G. Network partitioning algorithms as cooperative games // Computational Social Networks. 2018. Vol. 5, No. 11. P. 1-28.
4. Bjorndal E., Hamers H., Koster M. Cost Allocation in a Bank ATM Network // Mathematical Methods of Operations Research. 2004. Vol. 59. P. 405-418.
5. Carraro C. The Structure of International Environmental Agreements // in International Environmental Agreements on Climate Change, C. Carraro (ed.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. P. 9-26.
6. Driessen T., Funaki Y. Coincidence of and collinearity between game theoretic solutions // OR Spectrum. 1991. Vol. 13, No. 1. P. 15-30.
7. Gao H., Petrosyan L., Qiao H., Sedakov A. Cooperation in two-stage games on undirected networks // Journal of Systems Science and Complexity. 2017. Vol. 30, No. 3. P. 680-693.
8. Haeringer G. Stable Coalition Structures with Fixed Decision Scheme. Economics with Heterogeneous Interacting Agents // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 2001. Vol. 503 (IV). P. 217-230.

9. Parilina E., Sedakov A. Stable Bank Cooperation for Cost Reduction Problem // The Czech Economic Review. 2014. Vol. 8, No. 1. P. 7-25.
10. Parilina E., Sedakov A. Stable Cooperation in Graph-Restricted Games // Contributions to Game Theory and Management. 2014. Vol. 7. P. 271-281.
11. Sedakov A., Parilina E., Volobuev Yu., Klimuk, D. Existence of Stable Coalition Structures in Three-person Games // Contributions to Game Theory and Management. 2013. Vol. 6. P. 407-422.
12. Shapley L. S. A value for n-person games // In: Kuhn H.W., Tucker A.W. (Eds.) Contributions to the Theory of Games. Vol. II. Princeton University Press, 1953. P. 307-317.
13. Sun F.Y., Parilina E. Existence of Stable Coalition Structures in Four-person Games // Contributions to Game Theory and Management. 2018. Vol. 11. P. 224-248.