

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ СОГЛАСОВАННОСТИ СУЖДЕНИЙ В МАТРИЦАХ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

В.А. Судаков

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Россия, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4
E-mail: sudakov@keldysh.ru

А.Е. Куренных

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4
E-mail: kurennykh@galaktika.ru

В.П. Осипов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Россия, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4
E-mail: osipov@keldysh.ru

Ключевые слова: поддержка принятия решений, парные сравнения, согласованность суждений эксперта, индекс согласованности.

Аннотация: В настоящей работе разработаны и исследованы методы повышения согласованности суждений в матрице парных сравнений, необходимость использования которых возникает при использовании парных сравнений в задачах ранжирования критериев и/или альтернатив. Авторами предложены и рассмотрены два подхода к решению поставленной задачи: (i) первый подход основывается на требовании к транзитивности суждений в матрице, вводимой экспертом, (ii) второй подход основан на применение эволюционного алгоритма оптимизации. Предложенные методы сравнены между собой на тестовой выборке случайно сгенерированных матриц парных сравнений, выявлены их преимущества и недостатки. Для каждого из методов была разработана программная реализация на языке Ruby, которая доступна для пользователей в распределенных веб-сервисах для поддержки принятия решений ws-dss.com.

1. Введение

Метод парных сравнений находит широкое применение в задачах поддержки принятия решений, к таким задачам относятся ранжирование альтернатив или критериев с помощью матриц парных сравнений или метод анализа иерархий. Матрица парных сравнений является квадратной и обратносимметричной, на главной диагонали расположены единицы. Метод парных сравнений может быть ориентирован на одного эксперта или их группу, в любом случае суждения лица, выставяющего свои оценки должны удовлетворять требованию согласованности.

Для оценки согласованности таких суждений используются различные числовые показатели: индекс согласованности [1], индекс относительной согласованности [2],

различные функционалы [3, 4]. Эти показатели имеют различный физический смысл относительно матрицы парных сравнений и каждый из них позволяет с определенной точностью сделать заключение о степени согласованности суждений. Наиболее широко применяемым и «классическим» показателем является индекс согласованности (ИС), предложенный Томасом Л. Саати, именно на этот показатель ориентированы постановка задачи и разработанные методы, представленные в данной работе.

2. Постановка задачи

2.1. Содержательная постановка задачи

При использовании метода парных сравнений экспертом заполняется квадратная обратнo-симметричная матрица парных сравнений, на главной диагонали которой расположены единицы, а выставляемые оценки, как правило, соответствуют фундаментальной шкале (1 ... 9, и обратные значения $\frac{1}{9}$... 1), однако оценки могут выставляться и в произвольной шкале, что в рассматриваемой постановке задачи не имеет особого значения. Основная аксиома теории принятия решений требует, чтобы суждения эксперта были транзитивными, однако в некоторых случаях из-за ошибок, невнимательности, а иногда и намеренно данное условие нарушается, что приводит к уменьшению согласованности суждений. Для числовой оценки согласованности суждений американским ученым Томасом Л. Саати была предложена мера, которая называется индексом согласованности, именно ее используют авторы данной работы. Отметим, что чем индекс согласованности ниже, тем выше согласованность суждений в матрице. Таким образом, суть задачи сводится к тому, что необходимо найти (подобрать) элементы исходной матрицы парных сравнений, которые плохо влияют на общую согласованность суждений, а затем вычислить вариации, которые необходимо применить к найденным элементам, чтобы уменьшить значение ИС.

Также, отметим, что при решении данной задачи могут накладываться ограничения, среди которых: ограничение на количество элементов, которые можно варьировать, требуемая граница сверху на ИС, относительная величина, на которую можно изменить один конкретный элемент матрицы.

Рассмотрим далее различные варианты формализованной постановки данной задачи.

2.2. Формализованная постановка задачи

Для формализации задачи введем следующие обозначения:

A – исходная матрица парных сравнений, которую предложил эксперт;

n – размер матрицы;

$$ИС_A = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

– индекс согласованности, где λ_{\max} – максимальное собственное значение матрицы A .

Дополнительно введем следующие обозначения, которые необходимы при решении задачи: X – матрица вариаций; K – количество элементов, которые можно менять.

Теперь можно сформулировать критерий оптимизации и сформулировать ограничения. Критерий оптимизации – минимум ИС:

$$\min_{X_{i,j} \in \mathbb{R}} ИС_{(A+X)}$$

При ограничении на количество варьируемых элементов:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j>i} \operatorname{sgn}^2(X_{i,j}) \leq K$$

И, как дополнительное ограничение, относительная величина вариации одного элемента:

$$X_{i,j} \leq \xi A_{i,j}, \quad i = \overline{0, n-1}; j > i, \text{ где } \xi - \text{ константа, задаваемая экспертом.}$$

В результате решения оптимизационной задачи получается матрица X , у которой на главной диагонали и ниже нее стоят нули, а над главной диагональю находятся действительные, отличные от нуля числа, количество которых не превышает K . Данная матрица и будет являться решением задачи с точки зрения предлагаемого метода, а для того, чтобы получить новую матрицу парных сравнений A' с более высокой согласованностью необходимо вычислить ее следующим образом:

$$A' = A + X.$$

3. Методы решения задачи

3.1. Транзитивность суждений

Для решения поставленной задачи, в первую очередь, был опробован подход, который основан на главной аксиоме поддержки принятия решений – транзитивности суждений. Суть данного подхода строится на следующем утверждении: если объект $a_i > a_j$ с оценкой a_{ij} , а объект $a_j > a_k$ с оценкой a_{jk} , то объект $a_i > a_k$ с оценкой, которая должна вычисляться как $a_{ik} = a_{ij} \times a_{jk}$. А элементы матрицы X вычислялись бы как разность между фактической оценкой, выставленной экспертом, и оценкой, которая должна соответствовать условию транзитивности суждений.

Данный подход является самым быстрым и простым с вычислительной точки зрения, показал себя эффективным, применительно к некоторым матрицам, а в некоторых случаях результат его применения оказался недостаточно качественным, в связи, с чем от него пришлось отказаться.

3.2. Представление ограничений в виде системы уравнений

Другой подход, который авторы данной работы апробировали применительно к решению поставленной задачи, основывался на сведении ограничения на количество варьируемых элементов к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x_{0,1} \times x_{0,2} \times \dots \times x_{0,k+1} = 0 \\ x_{0,2} \times x_{0,3} \times \dots \times x_{0,k+2} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Такой подход использовал эволюционный метод оптимизации, однако, эффективность от его применения при такой системе ограничений была только в случае матриц малых размерностей, в связи, с чем от него также пришлось отказаться.

3.3. Множество оптимизационных задач

Еще один обоснованный метод решения задачи заключается в разбиении исходной оптимизационной задачи на множество более элементарных задач, среди которых предлагается найти глобальный оптимум, который обеспечил бы решение задачи с учетом заданных экспертом ограничений.

Предположим, что эксперт допустил изменение K элементов матрицы $n \times n$, ($K < \frac{n^2-n}{2}$). В таком случае можно рассмотреть следующее множество подзадач, мощ-

ность которого определяется как $C_{(n^2-n)/2}^K$. Данное множество можно разбить на K подмножеств: K_1 включает все оптимизационные подзадачи, где оптимизация идет только по одному элементу матрицы A ; K_2 включает все оптимизационные подзадачи, где оптимизация идет только по двум элементам матрицы A ; и так далее до подмножества K_k , где для оптимизации применяются все K элементов матрицы A .

Заметим, что мощность подмножеств K_i возрастает с увеличением K , это показано в Таблице 1.

Таблица 1. Количество решаемых оптимизационных подзадач в зависимости от ограничения на количество варьируемых элементов.

	1	2	K
$card(K)$	$\frac{1}{2}(n^2 - n)$	$\frac{1}{4}(n^2 - n) \left(\frac{1}{2}(n^2 - n) - 1 \right)$	$C_{(n^2-2)/2}^K$

При использовании данного метода критерий оптимизации и ограничение на количество варьируемых элементов распадаются на следующий набор оптимизационных задач:

$$\min_{X_{i,j} \in \mathbb{R}} \left\{ \min_{X_{0,1} \in \mathbb{R}} \text{ИС}_{(A+X)}, \min_{X_{0,2} \in \mathbb{R}} \text{ИС}_{(A+X)}, \dots, \min_{X_{n-2,n-1} \in \mathbb{R}} \text{ИС}_{(A+X)} \right\},$$

для случая, когда $K = 1$.

$$\min_{X_{i,j} \in \mathbb{R}} \left\{ \min_{X_{0,1}, X_{0,2} \in \mathbb{R}} \text{ИС}_{(A+X)}, \min_{X_{0,1}, X_{0,3} \in \mathbb{R}} \text{ИС}_{(A+X)}, \dots \right\},$$

для случая, когда $K = 2$. И так далее, перебирая все кортежи из элементов над главной диагональю матрицы X , длина которых удовлетворяет ограничению K .

Видно, что количество подзадач достаточно велико, однако, благодаря современным технологиям на основе параллельных вычислений, это вовсе не проблема.

При реализации данного метода решения авторами использовался улучшенный стохастический эволюционный алгоритм ранжирования (Improved Stochastic Ranking Evolution Strategy, ISRES) [5, 6], который поочередно или параллельно (в зависимости от имеющегося комплекса технических средств) применяется для всех кортежей из элементов матрицы A , длина которых $\leq K$, в результате чего получается K решений задачи, которые предлагаются эксперту для рассмотрения. Выбор наиболее подходящего из них остается на его усмотрение.

4. Использование метода

4.1. Пример

4.1.1. Подготовка исходных данных. Для использования программного обеспечения, реализующего повышение согласованности суждений необходимо представить исходные данные в формате JSON. В них входит сама матрица и допустимое число элементов, которые можно менять. Дополнительными опциями могут быть нижний порог индекса согласованности, требуемый экспертом, и относительное ограничение на величину вариации элемента. Рассмотрим вариант, когда ограничение наложено только на количество элементов, которые можно менять, а сами вариации могут быть любой величины.

Будем использовать в нашем примере матрицу “matrix” размера 5×5 , а количество допустимых к изменению элементов “cnt” будем изменять от 1 до 3 и сравним получаемые результаты.

4.1.2. Интерфейс системы. JSON с подготовленными экспертом данными может быть передан в систему WS-DSS различными способами: из прикладной программы посредством RESTful API или прямым вводом в пользовательском интерфейсе по следующему URL: https://ws-dss.com/ws_jobs/new?locale=ru. Доступный пользователю интерфейс представлен на рис. 1.

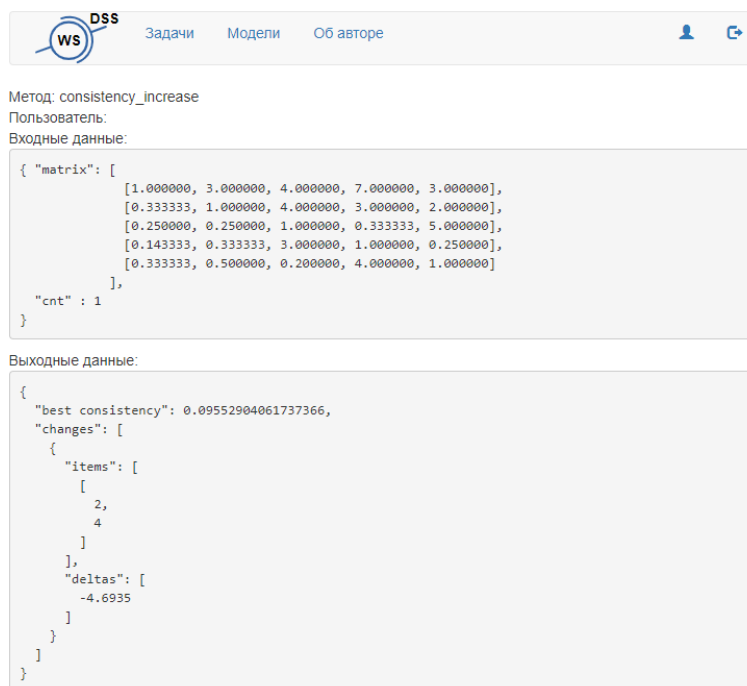


Рис. 1. Пример входных и выходных данных при использовании метода повышения согласованности.

В области выходных данных приводится наилучшее значение ИС “best consistency”, отсчитываемые с нуля индексы элемента, который необходимо варьировать “changes/items” и величина, которую необходимо прибавить к соответствующему элементу исходной матрицы “changes/deltas”.

4.2. Интерпретация результатов

Повторим выполнение процедуры повышения согласованности для той же матрицы с разрешением изменять 2 и 3 элемента, а результаты трех вычислительных экспериментов сведем в таблице 2.

Таблица 2. Результаты повышения согласованности в матрице 5x5.

	1 элемент	2 элемента	3 элемента
1. [Индексы], вариация	[2, 4], -4.6935	[2, 3], 1.0491	[0, 2], 8.9976
2. [Индексы], вариация		[2, 4], -4.494	[1, 4], -1.2315
3. [Индексы], вариация			[2, 4], -4.8464
Итоговый ИС	0.0955	0.0378	0.0192

Видно, что в каждом случае значение ИС было выведено в допустимую область (значение менее 0.1), и каждую из трех вариантов матрицы, которую эксперт может по-

лучить в результате применения предложенной вариации, допустимо использовать в процессе поддержки принятия решений. Отметим, что выбор наиболее подходящего из трех вариантов результирующей матриц остается на усмотрение эксперта и предполагает анализ изменения множества доминирующих объектов, а также контраста доминирования.

Отметим также, что в действиях алгоритма присутствует “системность”: в каждом варианте решения оптимизационной задачи предлагается внести изменения в элемент с индексами [2, 4], более того, величины вариации в каждом из трех опытов являются достаточно близкими.

В заключение отметим, что если строго следовать постановке задачи, представленной в разделе 3, то экспертом должна быть выбрана третья матрица, которая, в сравнении с исходной, будет выглядеть следующим образом (измененные элементы выделены курсивом):

$$A = \begin{pmatrix} 1.000 & 3.000 & 4.000 & 7.000 & 3.000 \\ 0.333 & 1.000 & 4.000 & 3.000 & 2.000 \\ 0.250 & 0.250 & 1.000 & 0.333 & 5.000 \\ 0.143 & 0.333 & 3.000 & 1.000 & 0.250 \\ 0.333 & 0.500 & 0.200 & 4.000 & 1.000 \end{pmatrix}, \quad \text{ИС}_A = 0.2088$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1.000 & 3.000 & 12.99 & 7.000 & 3.000 \\ 0.333 & 1.000 & 4.000 & 3.000 & 0.769 \\ 0.076 & 0.250 & 1.000 & 0.333 & 0.154 \\ 0.143 & 0.333 & 3.000 & 1.000 & 0.250 \\ 0.333 & 1.300 & 6.493 & 4.000 & 1.000 \end{pmatrix}, \quad \text{ИС}_{A'} = 0.0192$$

5. Применение

Предложенное авторами методическое и программное обеспечение предназначено для лиц, которые занимаются поддержкой принятия решений в различных научных и технических задачах, среди которых:

- задачи планирования научных и прикладных исследований на российском сегменте МКС [7];
- задачи оценивания экземпляров вооружений и военной техники [8];
- и многие другие.

6. Заключение

В представленной статье рассмотрены актуальные вопросы в области математического и программного обеспечения для систем поддержки принятия решений. Предложен метод, с помощью которого можно эффективно и за приемлемое время сформировать рекомендации, руководствуясь которыми эксперт может повысить согласованность предложенной им матрицы парных сравнений. Разработано алгоритмическое обеспечение, эффективность которого особенно высока для задач высокой размерности. Программная реализация описанного метода находится в открытом доступе и доступна к использованию для исследователей, экспертов и разработчиков в интернете по адресу WS-DSS.com [9, 10].

Еще раз отметим, что разработанный подход не нацелен на то, чтобы каким-либо образом заменить эксперта или полностью переделать его суждений, а служит лишь

для выработки рекомендаций, следуя которым можно повысить качество и точность принимаемых решений. Результат алгоритмической обработки исходной матрицы парных сравнений подлежит анализу и оценке со стороны эксперта, а предлагаемые корректировки элементов могут быть приняты, отвергнуты или приняты частично на его усмотрение, что сохраняет наличие субъективизма там, где он имеет место быть, а также позволяет снизить негативное влияние человеческого фактора.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00382а).

Список литературы

1. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: аналитические сети / Пер. с англ. Науч. ред. Андрейченков А.В., Андрейченкова О.Н. М.: Издательство ЛКИ, 2008. 360 с.
2. Ярыгин А.Н., Ярыгин О.Н. Относительное ранжирование интеллектуальных компетентностей с помощью интерактивных парных сравнений // Вектор науки ТГУ. 2011. Т. 16, № 2. С. 413-417.
3. Ломакин В.В., Лифиренко М.В. Алгоритм повышения степени согласованности матрицы парных сравнений при проведении экспертных опросов // Технические науки. 2013. № 11. С. 1798-1803.
4. Khatwani G., Kar A.K. Improving the Cosine Consistency Index for the analytic hierarchy process for solving multi-criteria decision making problems // Applied Computing and Informatics. 2017. Vol. 13. 2. P. 118-129.
5. Runarsson T., Yao X. Search Biases in Constrained Evolutionary Optimization // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part C: Applications and Reviews. 2005. Vol. 35. P. 233-243.
6. Runarsson T.P., Yao X. Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2000. Vol. 4, No, 3. P. 284-294.
7. Осипов В.П., Сивакова Т.В., Судаков В.А., Трахтенгерц Э.А., Загреев Б.В. Методологические основы поддержки принятия решений при планировании научно-прикладных исследований и экспериментов на международной космической станции (МКС) // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2013. Т. 9, № 3. С. 80-88.
8. Нестеров В.А., Обносов Б.В., Судаков В.А. Многокритериальная оценка военной техники с использованием гибридной функции предпочтений на примере беспилотных летательных аппаратов // Вооружение и экономика. 2015. № 4 (33). С. 55–66.
9. Sudakov V., Nesterov V., Kurennykh A. Integration of decision support systems “Kosmos” and WS-DSS with computer models // Tenth International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). Moscow, 2017. P. 1-4.
10. Осипов В.П., Судаков В.А. Многокритериальный анализ решений при нечетких областях предпочтений / Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 6. 16 с.