УДК 519.711

ГРАФОСТРУКТУРНОЕ РЕМОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ: ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ МЕТАГРАФАМИ

С.Л. Блюмин
Липецкий государственный технический университет
Россия, 398055, Липецк, Московская ул., 30
E-mail: sabl@lipetsk.ru

А.В. Галкин
Липецкий государственный технический университет
Россия, 398055, Липецк, Московская ул., 30
E-mail: avgalkin82@mail.ru

П.В. Сараев
Липецкий государственный технический университет
Россия, 398055, Липецк, Московская ул., 30
E-mail: psaraev@yandex.ru

А.С. Сысоев
Липецкий государственный технический университет
Россия, 398055, Липецк, Московская ул., 30
E-mail: anton_syssoyev@mail.ru

Ключевые слова: транспортные системы, графоструктурное ремоделирование, сети Петри, метаграфы, матричные характеристики.

Аннотация: Показана целесообразность ремоделирования графового представления сети Петри при моделировании транспортных систем ее метаграфовым представлением. Матрица инцидентности метаграфа сети Петри, в отличие от матрицы инцидентности орграфа сети Петри, непосредственно включает матрицы сети Петри. На модельном примере проиллюстрированы и проинтерпретированы матрица инцидентности, получаемый из нее лапласиан, его разложение на матрицы валентности и смежности. Взаимосвязь этих матриц является контрольным соотношением при их вычислении. Графоструктурное ремоделирование транспортных систем, основанное на переходе от орграфов моделирующих их сетей Петри к метаграфам, играет существенную роль при решении задач управления транспортными системами.

1. Введение

Сети Петри широко используются для моделирования транспортных систем; из значительного числа работ ограничимся указанием, например, [1–3]. Популярными являются представления сетей Петри графами и матрицами; см., например, [4, 5]. В [4] матрицы сетей Петри названы «матрицами инцидентности» и указано, что они сводятся к хорошо известным матрицам инцидентности орграфов, представляющих сети Петри; однако при ближайшем рассмотрении оказывается, что в стандартной матрице инцидентности орграфа сети Петри непосредственно не просматривается «матрица инцидентности» сети Петри в смысле [4]. В настоящее время уже хорошо известны и находят все более широкое применения более развитые, чем графы, графовые структуры — гиперграфы, метаграфы и некоторые другие; по поводу метаграфов см., например, [6,7]. Сети Петри были связаны с метаграфами основателями теории и применений метаграфов еще в одной из первых их работ [8], однако авторам данной работы оказалась недоступной работа [8] и неизвестны какие-либо работы, развивающие представление сетей Петри не графами, а гиперграфами или метаграфами. Переход от представления сети Петри графом к ее представлению метаграфом соответствует общей концепции математического ремоделирования, в данном случае графоструктурного ремоделирования динамических систем, в смысле [9]. Основная цель данной работы — показать, что в стандартной матрице инцидентности метаграфа, представляющего сеть Петри, непосредственно просматривается «матрица инцидентности» сети Петри в смысле [4]. Это показано ниже на модельном примере. Проиллюстрировано контрольное соотношение, связывающее матрицы инцидентности, смежности, валентности и лапласиан метаграфа

$$I(MG) \cdot I^T(MG) = L(MG) = D(MG) + A^{(+)}(MG) - A(G),$$

интерпретация которого дана ниже и которое играет существенную роль при решении задач управления транспортными системами, опирающемся на их ремоделирование сетями Петри с переходом от графов к метаграфам.

2. Модельный пример матричных характеристик сети Петри, ремоделированной метаграфом

Само определение сети Петри, в частности, ее входные и выходные функции, которые по существу являются многозначными отображениями, то есть соответствиями, так как их области прибытия являются, вообще говоря, неодноэлементными подмножествами множества позиций, приводит к целесообразности формализации сети Петри при помощи метаграфа. Действительно, рассмотрим в качестве модельного примера сеть Петри, приведенную в [5], с. 37: ее множества позиций и переходов $P = \{p_1, ..., p_5\}$, $T = \{t_1, ..., t_4\}$, определение через входные и выходные функции

$$\begin{array}{cc}
I(t_1) = \{p_1\}, & O(t_1) = \{p_2, p_3, p_5\}; \\
I(t_2) = \{p_2, p_3, p_5\}, & O(t_2) = \{p_5\}; \\
I(t_3) = \{p_3\}, & O(t_3) = \{p_4\}; \\
I(t_4) = \{p_4\}, & O(t_4) = \{p_2, p_3\}.
\end{array}$$

Матрицы этой сети Петри — «матрицы инцидентности» в смысле [4] — приведены в [5] на с. 43–44:

$$R^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R = R^+ - R^- = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственно орграф этой сети Петри, приведенный в [5] на с. 42, здесь не приводится и далее не используется. Его стандартная матрица инцидентности

$$I(OG) = \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & & & & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & & -1 & -1 & -1 & & \\ & & & & -1 & & & & & & & 1 & \\ & & & & & -1 & -1 & & & & & & 1 \\ & & & & & & & -1 & & & & & \\ 1 & & & & & & 1 & & -1 & & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & -1 & & -1 & \\ & & & & 1 & & & & & & & & -1 \\ & & 1 & 1 & & & & & & & -1 & & \end{bmatrix},$$

ее транспонированная

$$I^T(OG) = \begin{bmatrix} -1 & & & & & 1 & & & \\ -1 & & & & & & 1 & & \\ -1 & & & & & & & & 1 \\ & -1 & & & & & & & 1 \\ & & -1 & & & & & 1 & \\ & & & -1 & & & 1 & & \\ & & & -1 & & 1 & & & \\ 1 & & & & -1 & & & & \\ & 1 & & & & -1 & & & \\ & 1 & & & & & -1 & & \\ & 1 & & & & & & & -1 \\ & & 1 & & & & -1 & & \\ & & & 1 & & & & -1 & \end{bmatrix},$$

и лапласиан

$$L(OG) = I(OG) \cdot I^T(OG) = \begin{bmatrix} 4 & & & & -1 & -1 & -1 & & -1 \\ & 4 & & & & -1 & -1 & & -2 \\ & & 2 & & & & -1 & -1 & \\ & & & 3 & & -1 & -1 & -1 & \\ -1 & & & & 1 & & & & \\ -1 & -1 & & -1 & & 3 & & & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & & & 4 & & \\ & & -1 & -1 & & & & 2 & \\ -1 & -2 & & & & & & & 3 \end{bmatrix} =$$

$$D(G) - A(G),$$

имеющий стандартное и очевидным образом интерпретируемое разложение на матрицы валентности и смежности, характерны в текущем контексте тем, что приведенные выше «матрицы инцидентности» в смысле [4] в последних матрицах непосредственно не просматриваются.

Как уже отмечено выше, само определение сети Петри делает более естественным, чем представление орграфом, ее представление метаграфом, иначе говоря — ремоделирование орграфа метаграфом. Его матрица инцидентности, в соответствии с [6, 7], имеет вид

$$I(MG) = \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & & & & 1 & & & \\ & -1 & -I_4 & & & 1 & I_4 & \\ & & -1 & & & & 1 & \\ & & & -1 & & & & 1 \\ & & & & -1 & & & \\ 1 & & (R^+)^T & 1 & & -1 & -(R^-)^T & \\ 1 & & & 1 & & -1 & -1 & \\ & & 1 & & & & & -1 \\ 1 & 1 & & & & -1 & & \end{bmatrix},$$

ее транспонированная

$$I^T(MG) = \begin{bmatrix} -1 & & & & & 1 & 1 & & 1 \\ & -1 & -I_4 & & & & & R^+ & 1 \\ & & -1 & & & & & 1 & \\ & & & -1 & & 1 & 1 & & \\ 1 & & & & -1 & & & & \\ & 1 & I_4 & & & -1 & -1 & -R^- & -1 \\ & & 1 & & & & -1 & & \\ & & & 1 & & & & -1 & \end{bmatrix}.$$

Уже в этих матрицах хорошо просматриваются и указаны матрицы сети Петри — «матрицы инцидентности» в смысле [4].

Лапласиан этого метаграфа

$$L(MG) = I(MG) \cdot I^T(MG) = \begin{bmatrix} 2 & & & & -1 & -1 & -1 & & -1 \\ & 2 & & & & -1 & -1 & & -2 \\ & & 2 & & & & -1 & -1 & \\ & & & 2 & & -1 & -1 & -1 & \\ -1 & & & & 1 & & & & \\ -1 & -1 & & -1 & & 3 & 3 & & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & & 3 & 4 & & 2 \\ & & -1 & -1 & & & & 2 & \\ -1 & -2 & & & & 2 & 2 & & 3 \end{bmatrix} =$$

$$D(MG) + A^{(+)}(MG) - A(G)$$

имеет разложение, которое целесообразно сравнить с разложением лапласиана орграфа. Матрицы $A(G)$ в этих разложениях совпадают и являются матрицами смежности вершин неориентированного графа, лежащего в основе как орграфа, так и метаграфа сети Петри. Матрицы $D(G)$, $D(MG)$ очевидным образом различаются. Матрица $A^{(+)}(MG)$, отсутствующая в разложении лапласиана орграфа, соответствует тем вершинам графа, которые в матрице инцидентности метаграфа помечены одинаковыми элементами — обе $+1$ или обе -1.

3. Заключение

Проблемы моделирования транспортных систем исследовались при участии авторов данной работы. В качестве одного из примеров можно указать работу [10].

Примером содержательной задачи является проблема моделирования широкого круга распределенных транспортных систем, таких как системы городского транспорта (включая метрополитен), маршруты такси, авиа- и железнодорожные транспортные системы. Указанная работа содержит математические основы матричного представления интервальных циклических гиперграфов, используемых для моделирования такого рода систем. Набор вершин интервального циклического гиперграфа определяется как циклическая группа; интервалы определяются как последовательности вершин в циклических группах, т.е. последовательности вершин без промежутков в соответствии с транспортными маршрутами. Матричное описание представлено матрицами инцидентности, валентности, смежности, лапласианом и связывающими их соотношениями [10]. Частная проблема управления транспортной системой представлена в работе [11]. Сформулирована задача поиска оптимальной длительности цикла светофорного регулирования и оптимального распределения её по фазам. В качестве критерия оптимизации управления регулируемым перекрёстком получила большое распространение величина средней транспортной задержки регулирования. Численный алгоритм ее оптимизации и предложен в работе [11].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 18-71-10034).

Список литературы

1. Кузнецов С.К., Потехин А.И. Применение сетей Петри для моделирования железнодорожных систем (обзор) // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 4937-4946.
2. Мартынова И.В., Ершов Н.М. Имитационное моделирование дорожного трафика с помощью сетей Петри. https://istina.msu.ru/media/publications/article/f6a/b82/44023783/546-551-paper-95.pdf
3. Юдаев В.В., Зубков Б.В. Применение сетей Петри для моделирования и верификации протоколов обеспечения транспортной безопасности // Авиационная и ракетно-космическая техника. 2016. № 4. С. 156-161.
4. Murata T. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications // Proceedings of the IEEE. 1989. Vol. 77, No. 4. P. 541-580.
5. Блюмин С.Л., Жбанова Н.Ю. Автоматы и сети Петри. Липецк: ЛГТУ, 2012. 83 с.
6. Basu A., Blanning R. Metagraphs and Their Applications. New York: Springer, 2007. 172 p.
7. Блюмин С.Л. Графоструктурное моделирование. Метаграфы и их матрицы // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2015. № 1. С. 7-13.
8. Basu A., Blanning R. Metagraphs and Petri nets in model management // Proceedings of the Second Annual Workshop on Information Technologies and Systems (WITS-92). Dallas: DSU, 1992. P. 64-73.
9. Галкин А.В., Блюмин С.Л., Сараев П.В., Сысоев А.С. Концепция математического ремоделирования динамических систем // Труды Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (ММТТ-30). СПб.: Политехнический университет, 2017. Т. 5. С. 83-87.
10. Blyumin S.L., Galkin A.V., Saraev P.V., Sysoev A.S. Interval cyclic hypergraphs for modeling of transportation systems // Proceedings of the Second International Conference on Traffic and Transport Engineering ICTTE. Belgrade: City Net Scientific Research Center, 2014. P. 157-163.
11. Сысоев А.С. Численный алгоритм оптимизации функции транспортной задержки на регулируемом перекрестке // Научно-технический вестник Поволжья. 2012. № 5. С. 324-330.