

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СОСУДА С ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

С.А. Кумакшев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, пр. Вернадского, д. 101, корп. 1

E-mail: kumak@ipmnet.ru

Ключевые слова: тяжелая жидкость, малые колебания, управление.

Аннотация: В линейном приближении исследуется задача о малых колебаниях тяжелой жидкости со свободной поверхностью в подвижном сосуде (например, танкеры, цистерны, топливные баки, технологические объекты). Разработан новый метод конструктивного решения задачи о корректном приведении глубокого прямоугольного сосуда (контейнера) с относительно покоящейся тяжелой жидкостью в состояние поступательного движения с требуемой скоростью. Во избежание резонансных эффектов с целью не возбуждения внутренних волн предлагается и реализуется алгоритм квазистационарного существенного изменения скорости сосуда с жидкостью как целого. В конце процесса заданного изменения скорости оцениваются возбужденные внутренние колебания жидкости в зависимости от величины, длительности и степени гладкости по В.А. Стеклову управляющего воздействия (ускорения).

1. Постановка задачи.

Для описания состояния несжимаемой однородной жидкости в горизонтально перемещаемом сосуде вводится потенциал $\varphi = \varphi(t, x, y)$ относительных скоростей, где t — время, x, y — естественные декартовы координаты в вертикальной плоскости, связанные с нижней ($y = 0$, дном) и левой ($x = 0$, вертикальной) стенкой; торцевые эффекты не учитываются. Согласно [1–3] имеет место нестандартная начально-краевая в прямоугольнике (плоская) задача линейного приближения

$$(1) \quad \Delta\varphi = 0, \quad 0 < x < l, \quad \varphi(0, x, y) = \text{const}; \quad \varphi'_x \equiv 0, \quad x = 0, l; \quad \varphi'_y \equiv 0, \quad y = 0; \\ (\ddot{\varphi} + g\varphi'_y)|_{y=h} = x\gamma(t), \quad \gamma = \ddot{c}, \quad t \geq 0.$$

Здесь Δ — двумерный оператор Лапласа, g — ускорение сил тяжести.

Выражение первого приближения для формы поверхности жидкости имеет вид

$$(2) \quad \eta(t, x) = h - \frac{\dot{c}(t)}{g}x + \frac{1}{g}\dot{\varphi}(t, x, h), \quad 0 \leq x \leq l; \\ \dot{\eta} = v_y = -\varphi'_y(t, x, h), \quad 0 \leq t \leq T < \infty.$$

Из выражений (2) следует соответствующее граничное условие (1).

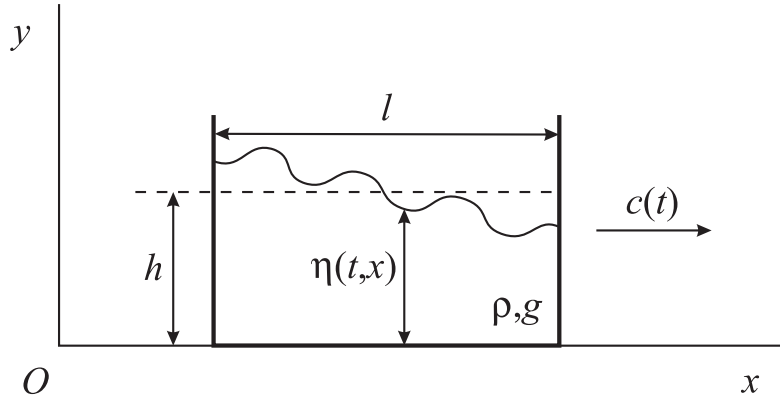


Рис. 1. Геометрия задачи

2. Приближенное решение

Для приближенного решения используется модальный подход. Потенциал скоростей [1, 2]:

$$(3) \quad \varphi(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(t) \cos \pi n \frac{x}{l} \left(\frac{\operatorname{ch} \pi n \frac{y}{l}}{\operatorname{ch} \pi n \frac{h}{l}} \right),$$

где Θ_n — коэффициенты Фурье, подлежащие определению из условий задачи управления (1) с конечными условиями $c(T) = c^*$, $w(T) = 0$, $\varphi(T, x, y) = \text{const}$. Представление (3) приводит к счетной системе задач Коши для Θ_n

$$(4) \quad \begin{aligned} \ddot{\Theta}_n + \omega_n^2 \Theta_n &= \alpha_n \gamma, & \alpha_0 &= \frac{l}{2}, & \alpha_n &= - \left(\frac{2}{\pi n} \right)^2 l \sin^2 \pi \frac{n}{2}; \\ \omega_0^2 &= 0, & \omega_n^2 &= \pi n \frac{g}{l} \operatorname{th} \pi n \frac{h}{l}, & n &\geq 1; \\ \Theta_0(0) &= \varphi_0(0), & \dot{\Theta}_0(0) &= \dot{\varphi}_0(0); & \Theta_n(0) &= \dot{\Theta}_n(0) = 0. \end{aligned}$$

Требуется выбором финитной (достаточно гладкой) функции $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq T$, изменить на величину $\delta c = c^* - c^0$ скорость $c(t)$ сосуда. Режим управления должен приводить к исчезающе малым относительным колебаниям нечетных мод, $n = 2k - 1$, жидкости. Колебания четных мод $n = 2k$ в сосуде не возбуждаются посредством продольных (вдоль оси Ox) воздействий.

Представим решение счетной системы задач Коши (4) (учтем, что $w(0) = 0$)

$$(5) \quad \begin{aligned} \Theta_n(t) &= \frac{\alpha_n}{\omega_n} \int_0^t s_n(t - \tau) \gamma(\tau) d\tau = \alpha_n \int_0^t c_n(t - \tau) w(\tau) d\tau, \\ s_n &\equiv \sin \omega_n t, c_n(t) \equiv \cos \omega_n t, 0 \leq t \leq T; & \gamma(t) &\equiv 0, w(t) \equiv 0, t \leq 0, t \geq T. \end{aligned}$$

Здесь величина интервала $T \gg T_1 = 2\pi/\omega_1$, где T_1 — период низшей моды $n = 1$.

Рассматриваются классы функций $\{\gamma(t)\}$, $\{w(t)\}$ такие, что

$$(6) \quad \int_0^T \gamma(t) dt = 0, \quad \int_0^T (T - t) \gamma(t) dt = \int_0^T w(t) dt = c^* - c^0 = \delta c.$$

Потенциал относительных скоростей $\varphi(t, x, y)$ (3) должен быть достаточно гладкой функцией всех аргументов, обеспечивающим малость кинематических и силовых возмущений, вызванных волновыми движениями жидкости согласно (1), (2), (5). В качестве масштаба скорости выбирается абсолютное максимальное, по (t, x, y) значение величины $v = -\varphi_x \approx -\varphi_{1x}$ при заданных функциях $\gamma(t)$, $\omega(t)$ из рассматриваемого класса, либо величина \hat{c} , обусловленная допустимым значением \hat{w} , или мощностью, т.е. $\hat{c}\hat{w}$. Требуется на асимптотически большом интервале времени $T \gg T_1$ привести сосуд в состояние движения, как целого с требуемой вариацией скорости $\delta c \gg |v|$.

3. Примеры

Рассмотрим примеры реализации различных режимов управляемого движения, удовлетворяющих этим условиям [5].

3.1. Воздействие на сосуд посредством ударов

Пусть имеем место негладкое кинематическое воздействие аппроксимируемое посредством обобщенных δ -функций Дирака в моменты времени $t = 0, T, T \gg T_1$, положительной и отрицательной интенсивности $\pm w_0$. Соответствующее ускорение сосуда $w(t)$ (5), (6) может быть реализовано посредством силового воздействия [1, 3]. При упрощающем условии $w(t) = w_0 = \text{const}$ для $0 \leq t \leq T$ получается кусочно-линейная зависимость $c(t)$

$$c = c^0 \frac{T-t}{T} + c^* \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad c \equiv c^*, \quad t > T,$$

где $w_0 = \delta c/T$. Подстановка найденных выражений $\gamma(t)$, $w(t)$ в формулы (5) приводит к искомым выражениям $\Theta_n(t)$ для коэффициентов Фурье искомого потенциала скоростей $\varphi(t, x, y)$ (3):

$$\Theta_n(t) = \frac{\alpha_n \delta c}{w_n T} [s_n(t) - \sigma s_n(t-T)], \quad \sigma = 0, 1 \quad (t \leq T).$$

С помощью оценки \hat{v}_1 первой моды скорости жидкости $v_1 = -\partial\varphi_1/\partial x$ получим отношение $\hat{v}_1/\delta c \sim T_1/T = \varepsilon \ll 1$ при достаточно большом значении T . Таким образом, посредством асимптотически малого управляющего воздействия $w_0 = O(\sqrt{\varepsilon})$ на интервале времени $T \sim 1/\varepsilon$ можно добиться существенного изменения скорости сосуда $\delta c \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$, причем относительная скорость жидкости v будет $O(\sqrt{\varepsilon})$, т.е. асимптотически малой.

Отметим, что коэффициенты $\Theta_n \sim n^{-5/2}$, что приводит к абсолютной и равномерной сходимости ряда (3) и к непрерывно дифференцируемой по x, y или по t (дважды) функции $\varphi(t, x, y)$, т.е. ряды для скорости $v_{x,y} = \dot{\varphi}'_{x,y}$ и давления $p = \rho\dot{\varphi}$ будут сходящимися. Ряды для ускорений $\dot{\varphi}'_{x,y}$ будут сходящиеся по среднеквадратической норме. Возвышение η будет также порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

3.2. Воздействие соответствующее кусочно-гладкой функции

Рассмотрим задачу управления в случае более гладкого по В.А. Стеклову [4] воздействия посредством кусочно-гладкой функции $\gamma(t)$; ускорение $w(t)$ будет кусочно-непрерывно дифференцируемой. Для определенности и наглядности полагаем два

эквивалентных в смысле гладкости варианта

$$(7) \quad \begin{aligned} a) \quad \gamma &= \gamma^a(t) = \gamma_0^a(1 - 2t/T), & b) \quad \gamma &= \gamma_0^b = \text{sign}(1 - 2t/T), \\ 0 \leq t \leq T; \quad \gamma^{a,b}(t) &\equiv 0, \quad t < 0, \quad t > T; \quad \gamma_0^{a,b} = \text{const.} \end{aligned}$$

Квадратуры от функций $\gamma^{a,b}(t)$ элементарно вычисляются и получаемые выражения для ускорения $w = w^{a,b}(t)$ автоматически удовлетворяют условиям $w^{a,b} \equiv 0$ при $t < 0, t > T$. Искомые значения скорости $c(t)$ также элементарно вычисляются аналитически

$$(8) \quad \begin{aligned} c^{a,b}(t) &= c^0 + \int_0^t w^{a,b}(\tau) d\tau = c^0 + \int_0^t (t - \tau) \gamma^{a,b}(\tau) d\tau, \quad c^{a,b}(T) = c^*; \\ \gamma_0^a &= 6\delta c T^{-2}, \quad \gamma_0^b = 4\delta c T^{-2}; \quad \delta c = c^* - c^0. \end{aligned}$$

С помощью выражений (7), (8) по формулам (5) вычисляются аналитически коэффициенты Фурье $\Theta_n(t)$ и их оценки при $t > T$:

$$(9) \quad \begin{aligned} \Theta_n^{a,b}(t) &= \alpha_n \int_0^t c_n(t - \tau) w^{a,b}(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T; \\ w^{a,b}(t) &\equiv 0, \quad t < 0, \quad t > T; \quad n = 2k - 1, \\ |\Theta_n^{a,b}(t)| &\leq K_n^{a,b} \delta c T^{-2} \alpha_n \omega_n^{-2}; \quad K_n^a \approx 24, \quad K_n^b \approx 16 \\ |\varphi_n^{a,b}(t, x, y)| &\leq \frac{4}{\pi^3} K^{a,b} \frac{l^2}{gT^2} \frac{\delta c}{n^3 \text{th}(\pi n h/l)}. \end{aligned}$$

Ряды (3) для $\varphi^{a,b}$ абсолютно и равномерно сходятся к гладким дифференцируемым функциям. Согласно (9) непрерывным будут распределенные скорости $v_{x,y}^{a,b} = -\partial\varphi^{a,b}/\partial x, \partial y$ и давление $p^{a,b} = \rho\dot{\varphi}^{a,b}$, а также ускорения $w_{x,y}^{a,b} = \dot{v}_{x,y}^{a,b}$. Из оценок (9) следует, что относительные величины указанных переменных могут быть сделаны сколь угодно малыми, в частности, относительные скорости

$$|v^{a,b}|/\delta c \sim K^{a,b} \frac{a}{gT^2} = \varepsilon^2, \quad |v_{a,b}| \sim \varepsilon^{2-\varkappa}, \quad \delta c \sim 1/\varepsilon^\varkappa, \quad 0 < \varkappa < 2$$

будут сколь угодно малыми, а скорость сосуда — сколь угодно большой при асимптотически большой величине $T \gg (g/l)^{-1/2}$ и достаточно гладкой функции $w(t)$.

Для гипотетической модели эволюции скорости танкера при $\delta c = 10 \text{ мс}^{-1}$ (~ 20 узлов), $v = 10^{-3} \text{ мс}^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $T = 10^3 \text{ с}$, $l = 10^2 \text{ м}$.

4. Заключение

Предложен и обоснован режим прецизионного управления сосуда с идеальной тяжелой жидкостью в состояние требуемого движения. Алгоритм реализован и протестирован для типовых управляющих функций. Установлена прикладная эффективность предложенного подхода для плохо управляемых колебательных систем с бесконечным числом степеней свободы в условиях резонанса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00538, 17-08-00742 и 18-01-00812), а также в рамках государственного задания АААА-А17-117021310387-0.

Список литературы

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. Акуленко Л.Д. О кинематическом управлении движением сосуда с идеальной тяжелой жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 39-46.
3. Акуленко Л.Д. Управление движением сосуда с тяжелой неоднородной жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 11-21.
4. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
5. Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А. Приведение сосуда с тяжёлой жидкостью в требуемое состояние движения // Доклады Академии наук. 2017. № 4. С. 416-420.