УДК 621.396

# ПРИМЕНЕНИЕ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК В ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА

**И.М. Рудько**
*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: igor-rudko@mail.ru

**Ключевые слова:** порядковая статистика, системы обнаружения, вероятности обнаружения и ложной тревоги, математическое моделирование.

**Аннотация:** Для систем обнаружения, реализующих алгоритм проверки двух статистических гипотез и использующих энергетический критерий обнаружения, разработан алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на статистических свойствах усеченных порядковых статистик (УПС). Приведены сравнительные результаты моделирования системы обнаружения, реализующей «классический» (однопороговый) алгоритм, и системы обнаружения, реализующей алгоритм на основе УПС (двухпороговый).

## 1. Введение

Во многих системах обработки локационной информации, работающих в пассивном режиме, системах спектрального анализа и анализа вибраций решаются задачи обнаружения сигнала на фоне помехи, причем статистические свойства сигнала и помехи одинаковы и единственным их отличием являются энергии (дисперсии). В простейшей форме операция обнаружения – это задача проверки двух статистических гипотез. Приемник вычисляет отношение правдоподобия, которое представляет собой отношение плотностей распределения вероятностей для гипотез $H_1$(сигнал+шум) и $H_0$(шум). Модель обнаружения обычно представляется как энергетический порог, установленный над средним значением помехи.

## 2. Фильтр на основе усеченной порядковой статистики (УПС-фильтр)

Часто в качестве статистики от наблюдений выбирают энергию сигнала, наблюдаемого на интервале [0, $T_0$], – энергетический критерий обнаружения (ЭКО) [1]: $X = \sum_{i=1}^{n} S^2(i\Delta t)$, где $T_0 = n\Delta t$; $\Delta t = 1/2\Delta F$; $\Delta t$ – интервал дискретизации по времени; $\Delta F$ – полоса пропускания входного фильтра системы обнаружения.

В работах [2,3] рассматриваются УПС-фильтры, реализуемые во временной [2] или частотной [3] областях.

Алгоритм работы УПС-фильтра следующий:

- На вход УПС-фильтра поступает последовательность выборок $\boldsymbol{X_j} = \sum_{i=1}^{m} X_i$ .
- Накапливается $r$ оцениваемых выборок $\boldsymbol{X_j}$.
- По накопленным выборкам строится матрица $X_{ij}$ размерностью $m$ строк на $r$ столбцов ($r$– «глубина» матрицы памяти) – $\{X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_m\}_j$ , где $1 \le j \le r$.
- В каждом столбце матрицы $X_{ij}$ строится порядковая статистика $X_{(i)j}$, где $1 \le i \le m$, – упорядоченные величины статистики $X_i$, такие, что $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(i)} \le \ldots \le X_{(m)}$.
- В каждой строке полученной матрицы $X_{(i)j}$ определяются оценки математических ожиданий (вектор $\hat{m}$ ) $\hat{m}_i = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} X_{(i)j}$ , где $1 \le i \le m$.
- Порог отсечения $k$ (первый порог) определяется из условия: $k = \arg\min_i \left| h_0 - \hat{m}_i \right|$, где $1 \le i \le m$ , а $h_0$ определяется, как будет показано ниже, по формуле (3).
- Вычисляется оценка $W_j = \sum_{i=k}^{m} X_{(i)j}$

На выходе УПС-фильтра получаем последовательность отфильтрованных оценок $W_j$, задача обнаружения по которым так же решается как задача проверки двух гипотез.

УПС-фильтр работает по принципу скользящего окна, т. е. каждый новый вектор $\boldsymbol{X_j}$ с индексом $r$+1 вытесняет из матрицы $X_{(i)j}$ вектор $\boldsymbol{X_j}$ с индексом 1.

Для реализации предлагаемого алгоритма обнаружения необходимо предварительное накопление выборок $\{X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_m\}_j$, где $1 \le j \le r$ (в отличие от «классического» алгоритма), что приводит к задержке в принятии решения на время $T = jT_0$, где $1 \le j \le r$. Такая задержка во многих задачах не является существенной.

*Следует подчеркнуть, что если в «классическом» алгоритме для принятия решения используется только вектор* $\boldsymbol{X}$*, то в предлагаемом алгоритме – матрица* $X_{(i)j}$*, в которой текущий вектор* $\boldsymbol{X_j}$ *является одним из столбцов.*

Работа УПС-фильтра основана на свойствах порядковых статистик [4]. Рассмотрим выборку, состоящую из $m$ случайных величин $X_i$: $\{X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_m\}$. Пусть $X_i$ описывается плотностью распределения $f_n(x) = 1/\sigma^2 \, k_n\left(x/\sigma^2\right)$ и функцией распределения $F_n(x) = \frac{1}{(2\sigma^2)^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^x x^{n/2-1} e^{-x/2\sigma^2} dx = K_n(x/\sigma^2)$, где $x > 0$, $k_n(\cdot)$ – плотность и $K_n(\cdot)$ – функция центрального $\chi^2$-распределения с $n$ степенями свободы; $\sigma^2$ – дисперсия.

Вычислим моменты случайной величины $W = \sum_{i=k}^{m} X_{(i)}$ , где $X_{(i)}$, $1 \le i \le m$, – упорядоченные величины, такие, что $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(i)} \le \ldots \le X_{(m)}$. Если случайные величины $X_i$ статистически независимы и одинаково распределены, то случайные величины $X_{(i)}$ зависимы из-за неравенств между ними. Будем называть $W$ усеченной порядковой статистикой (УПС), а $k$ – порогом отсечения. В работе [4] приведены выражения для вычисления моментов порядковых статистик, которые для выборки, описываемой центральным $\chi^2$-распределением имеют следующий вид:

– математическое ожидание $\mu_j$ величины $X_{(j)}$ определяется по формуле:

$$\mu_j = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!}\int_0^\infty K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1}\left[1-K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j}\frac{1}{\sigma^2}k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right) x dx ,$$

– дисперсия:

$$\sigma_j^2 = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!}\int_0^\infty K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1}\left[1-K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j}\frac{1}{\sigma^2}k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\left(x-\mu_j\right)^2 dx ,$$

– ковариация: $\sigma_{jk} = E\left[X_{(j)}X_{(k)}\right] =$

$$\frac{m!}{(m-k)!(k-j-1)!(j-1)!}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{y} C(x,y)\frac{1}{\sigma^4}k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)k_n\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)x\,y\,dx\right]dy,$$

где $C(x,y) = K_n\left(x/\sigma^2\right)^{j-1}\left[K_n\left(y/\sigma^2\right) - K_n\left(x/\sigma^2\right)\right]^{k-j-1}\left[1 - K_n\left(y/\sigma^2\right)\right]^{m-k}$.

Математическое ожидание случайной величины $W$ определяется по формуле

(1) $$\mu_W(k) = \sum_{j=k}^{m}\mu_j,\ 1 \le k \le m,$$

а дисперсия с учетом зависимости случайных величин $X_{(i)}$ [1]:

(2) $$\sigma_W^2(k) = \sum_{l=k}^{m}\sigma_l^2 + 2\sum_{k \le j < l \le m}\sigma_{jl},\ l \le k \le m,$$

и в силу центральной предельной теоремы при достаточно больших значениях $m$ ее функция плотности распределения также нормализуется: $W \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$.

# 3. УПС в задаче обнаружения подвижного объекта

Математическое ожидание $\mu_W(k)$ и дисперсия $\sigma^2{}_W(k)$ определяются формулами (1) и (2) и так же как для случайной величины $X$ зависят только от дисперсии $\sigma^2$. Таким образом, распределения случайной величины $W$ для шума ($H_0$) и смеси сигнала с шумом ($H_1$) различаются только дисперсией (мощностью) $\sigma^2$ наблюдаемого сигнала $S(t)$, которая для слагаемых статистики $X$ и УПС $W$ одинакова.

В работе [2] показано, что существует оптимальное значение порога отсечения $k$ – $k_{\text{опт}}$, обеспечивающее максимальную разделимость статистик $W$ для гипотез $H_0$ и $H_1$, (в районе медианы $f_n(x)$). Известными параметрами являются $\mu_0$ и $\sigma_0{}^2$. Поэтому порог $h_0$ определяется из уравнения:

(3) $$\alpha = \int_0^{h_0} f_{nш}(x)dx = \frac{1}{2^{n/2}\sigma_0^n\Gamma(n/2)}\int_0^{h_0} x^{n/2-1}e^{-x/2\sigma_0^2}dx,$$

где $\alpha$ – заданный квантиль.

Процесс принятия решения при использовании УПС $W$ является двухшаговым:

- по случайной выборке $X_i$, $1 \le i \le m$, строится порядковая статистика $X_{(i)}$, по которой для заданного порога отсечения $k$ (1-й порог) формируется УПС $W$ (УПС-фильтр);
- процесс принятия решения тот же, что и в «классическом» алгоритме: а именно, для УПС $W$ по заданной $P_{\text{лт}}$ выставляется порог обнаружения (2-й порог), в случае превышения которого принимается решение о справедливости гипотезы $H_1$.

Сравним рассмотренные выше алгоритмы («классический» и на основе УПС) на примере обработки локационной информации в пассивном режиме. Рассмотрим задачу обнаружения подвижного объекта (ПО) неподвижным наблюдателем (НН).

Обнаружение осуществляется по результатам обработки излученного объектом и принятого наблюдателем сигнала при наличии помех. Решение о наличии или отсутствии сигнала от объекта принимается НН периодически, после обработки поступившей на интервале наблюдения (накопления) длительностью $T_0$ реализации $X_1, X_2, ..., X_m$. $\sigma_ш^2$ – дисперсия помех на входе НН, $\sigma_c^2 = \sigma_c^2(v, D)$ - дисперсия сигнала, излученного ПО и поступившего на вход НН, зависящая от текущей скорости движения ПО $v$ и текущего расстояния $D$ между ним и НН. $X_i$ имеют дисперсию $\sigma_ш^2$ для шума и $\sigma_c^2 + \sigma_ш^2$ .для сигнала и шума. Задача обработки локационной информации в пассивном режиме полностью описывается моделью, использующей ЭКО, а система обнаружения описывается рассмотренной выше моделью «классической» задачи проверки двух гипотез.

Вероятность обнаружения ПО наблюдателем по результатам обработки информации на одном интервале наблюдения $T_0$ вычисляется по следующей формуле:

$$P_{\text{обн}}(\nu,D)=1-F_N\left(h_F\Big/\left(\frac{\sigma_c^2(\nu,D)}{\sigma_ш^2}+1\right)\right)=1-F_N\left(\frac{h_F}{\rho(\nu,D)+1}\right), \tag{4}$$

где $h_F$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ для $\chi^2$-распределения с $N$ степенями свободы, $N=2T_0\Delta F$, $\alpha=P_{\text{лт}}$ – вероятность ложной тревоги, $\rho$ – отношения сигнал/помеха.

Для заданной $P_{\text{лт}}$ вероятность обнаружения $P_{\text{обн}}$ в зависимости от дистанции $D$ для «классической» задачи определяется по формуле (4) – обозначим ее как $P_{\text{обн}}^X(\nu,D)$.

Сформируем УПС $W$. Для этого входной сигнал длительностью $T_0$ разбивается на $m$ фрагментов, причем разбиение может происходить как во временной, так и в частотной области. В результате каждый из $m$ фрагментов имеет плотность вероятности, описываемую $\chi^2$ - распределением с $n=N/m$ степенями свободы. Формулы (1) и (2), позволяют рассчитать $\mu_0$ и $\sigma_0^2$ помехи для УПС $W$ по известным параметрам помехи и заданному порогу отсечения $k$. «Потенциальные» вероятности обнаружения $P_{\text{обн}}^W(\nu,D)$ на каждом интервале [0, $T_0$], зависят от $\rho$. Как следует из формулы (4), $\rho$ является переменным и неизвестным параметром. Поэтому под «потенциальной» $P_{\text{обн}}$ здесь понимается вероятностью обнаружения, которая могла бы быть достигнута, если бы условие $\rho = const$ выполнялось для достаточно большого числа реализаций. Затем строится матрица $X_{(i)j}$, «глубиной» $r$, по которой для известных параметров помехи определяется порог отсечения $k$. И, наконец, по порогу отсечения $k$ строится УПС $W$. Для заданной $P_{\text{лт}}$ и отношению сигнал/помеха $\rho$ рассчитываются вероятности обнаружения в зависимости от дистанции $D$ – $P_{\text{обн}}^W(\nu,D)$.

Для задачи проверки двух гипотез с использованием УПС из-за сложности модели (алгоритма обнаружения) все параметры модели могут быть рассчитаны только путем математического моделирования.

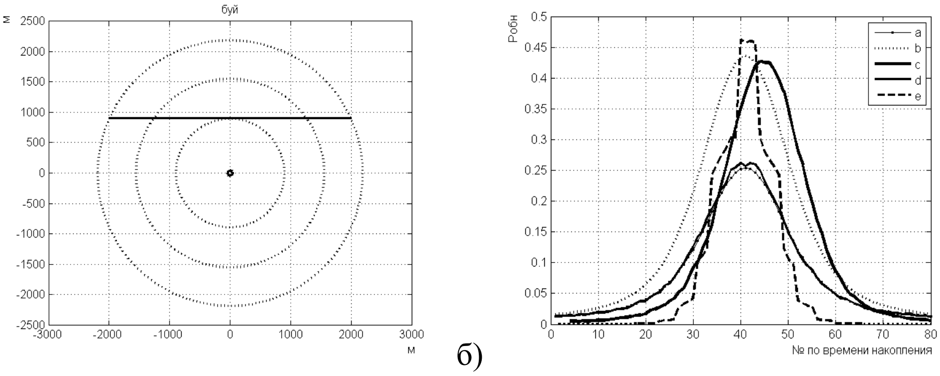
# 4. Результаты моделирования

Математическая модель содержит генераторы случайных чисел, генерирующие $\chi^2$ -распределения с $n$ степенями свободы и дисперсиями $\sigma_ш^2$ и $\sigma_c^2+\sigma_ш^2$ для гипотез $H_0$ и $H_1$, соответственно. Согласно приведенным выше формулам строятся случайные величины $Z$ и $W$. Для гипотез $H_0$ и $H_1$ набираются статистики для случайных величин $Z$ и $W$, по которым строятся оценки $\hat{\mu}_{Z0},\hat{\sigma}_{Z0}^2$ и $\hat{\mu}_{W0},\hat{\sigma}_{W0}^2$ для гипотезы $H_0$ и $\hat{\mu}_{Z1},\hat{\sigma}_{Z1}^2$ и $\hat{\mu}_{W1},\hat{\sigma}_{W1}^2$ для гипотезы $H_1$. По этим оценкам для заданной $P_{\text{лт}}$ определяется $P_{\text{обн}}$.

Моделирование проводилось при следующих предположениях:

- ПО пересекает район, контролируемый НН, находящемся в точке с координатами (0, 0), двигаясь прямолинейно с постоянной скоростью из точки с координатами (–2000, 900) в точку с координатами (2000, 900), как показано на рис. 1 а);
- число независимых интервалов за время прохождения трассы $K = 80$;
- закон затухания сигнала в среде – сферический;
- суммарное число степеней свободы $N = nm = 2000$.

На рис. 1 б) приведены зависимости вероятности обнаружения $P_{обн}$ от дистанции $D$ (т.е. от отношения сигнал/помеха $\rho$) для «однопорогового» и «двухпорогового» алгоритмов для «глубины» памяти $r$=4. Параметры модели имеют следующие значения: $n = 20$, $m = 100$, $P_{лт} = 0{,}005$, первый порог равен медиане статистики $X_i$ для помехи (в формуле (3) $\alpha = 0{,}5$). Размеры массивов для набора статистик – 8192.




а) б)

**Рис. 1** а)**.** Трасса прохода ПО мимо НН; б). Зависимости вероятностей обнаружения $P_{обн}$ от дистанции D.

На рис. 1б приняты следующие обозначения: a) – теоретическая $P_{обн}$ для «однопорогового» алгоритма; b) – теоретическая $P_{обн}$ для «двухпорогового» алгоритма; c) – оценки $P_{обн}$ для «двухпорогового» алгоритма (по модели); d) – оценки $P_{обн}$ для «однопорогового» алгоритма(по модели); e) – оценки «потенциальной» $P_{обн}$ для «двухпорогового» алгоритма (по модели).

Сдвиг максимума графика «c» относительно «d» определяется «глубиной» памяти.

## 5. Заключение

Разработан алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на свойствах УПС, который позволяет обеспечить большую $P_{обн}$ при заданной $P_{лт}$ по сравнению с «классическим» алгоритмом проверки двух гипотез. Выигрыш достигается за счет введения порога, отсекающего малые значения обрабатываемого сигнала, и использования информации, содержащейся в предыдущих реализациях сигнала, для построения оценки этого порога, которая в «классическом» алгоритме не используется.

Приводятся результаты математического моделирования. Показано, что применение алгоритма на основе УПС (двухпорогового) в задаче обнаружения ПО позволяет обеспечить существенно большую $P_{обн}$ при заданной $P_{лт}$ по сравнению с «классическим» алгоритмом проверки двух гипотез или при фиксированных вероятностях $P_{обн}$ и $P_{лт}$ обеспечить перекрытие заданного района меньшим количеством НН.

## Список литературы

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 2. М.: Советское радио, 1968. 504 с.
2. Рудько И.М. Применение порядковых статистик в задачах обнаружения // Управление большими системами. Выпуск 37. М.: ИПУ РАН, 2012. С. 63-83.
3. Рудько И.М Применение порядковых статистик в задачах обнаружения в частотной области // Управление большими системами. Выпуск 62. М.: ИПУ РАН, 2016. С. 6-29.
4. Дэйвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979. 336 с.