УДК 519.685

МНОГОМЕРНЫЕ РЫНКИ ОПЦИОНОВ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПО CC-VAR

Г.А. Агасандян
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН
Россия, 119991, Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: agasand17@yandex.ru

Ключевые слова: континуальный критерий VaR, многомерный рынок, базовые активы, сценарии, индикаторы, базисные инструменты, процедура Неймана-Пирсона.

Аннотация: Рассматривается проблема распространения методологии CC-VaR на задачи построения оптимального портфеля инвестора для рынков с несколькими базовыми активами. Интерес к этой проблеме представляется естественным. На финансовых рынках присутствуют многие активы, в разной степени связанные между собой, но рассматриваемые по отдельности они не в состоянии сколько-нибудь полноценно отражать вероятностные свойства финансового рынка в целом. Предлагаемые конструкции иллюстрируются примером построения оптимального портфеля для двумерного рынка. Пример исследуется аналитическими средствами.

1. Введение

Работа рассматривает проблему распространения методологии континуального критерия VaR (CC-VaR) на задачи построения оптимального портфеля инвестора для однопериодных рынков с несколькими базовыми активами. Применение CC-VaR на одномерных (с единственным базовым активом) рынках, подробно изучается в [1-4]. Суть постановки задач оптимизации с CC-VaR состоит в следующем.

Заданы $p(x)$ и $c(x)$ – соответственно прогнозная (на конец периода) и стоимостная (на начало периода) плотности цены базового актива, $x\in \mathsf{X}(\subset\Re)$ – произвольный интервал на вещественной прямой. В простом случае ищется портфель, доставляющий минимум инвестиционной сумме при выполнении требований CC-VaR. Они состоят в выполнении неравенств $\mathsf{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1-\varepsilon$ сразу для *всех* $\varepsilon\in[0, 1]$, где q – доход, $\phi(\varepsilon)$ – неубывающая неотрицательная *функция рисковых предпочтений* (ф. р. п.) инвестора (P – вероятностная мера, задаваемая инвестором). Решение основывается на анализе функции относительных доходов $\rho(\cdot) = p(\cdot)/c(\cdot)$ и континуальном использовании процедуры Неймана-Пирсона из математической статистики [5].

Однако присутствие на финансовых рынках многих связанных между собой активов требует их совместного рассмотрения для полноценного отражения вероятностных свойств финансового рынка в целом.

2. Теоретические δ-рынки

Основная структура однопериодного многомерного теоретического δ-рынка во многом повторяет структуру одномерного, только доход по его инструментам определяется совокупностью будущих цен всех n базовых активов и некоторые скалярные величины становятся векторами. Пусть $\mathsf{X} = \prod_{i\in N}\mathsf{X}_i$, $\mathsf{X}_i \subset \mathfrak{R}$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, n – размерность рынка. Заданы две неотрицательные функции $p(\boldsymbol{x})$ и $c(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\mathsf{X}$, порождающие меры $\mathsf{P}\{M\}$ и $\mathsf{C}\{M\}$, $M\subset\mathsf{X}$, первая из которых – *прогнозная* мера, являющаяся прогнозом инвестора на конец периода, а вторая – *стоимостная* мера, которую предоставляет рынок. Построение оптимального портфеля инвестора основано на анализе *функция относительных доходов* $\rho(\boldsymbol{x}) \equiv p(\boldsymbol{x})/c(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\mathsf{X}$, с использованием процедуры Неймана-Пирсона и повторяющий (с очевидными изменениями) континуальный алгоритм [3,4].

Платежная функция произвольного инструмента $\boldsymbol{I}$ обозначается $\pi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{I})$, $|\boldsymbol{I}|$ – его рыночная стоимость, рассчитанная по плотности $c(\boldsymbol{x})$, а $\|\boldsymbol{I}\|$ – средний с точки зрения инвестора доход, рассчитанный по плотности $p(\boldsymbol{x})$ и интерпретируемый также как его справедливая стоимость.

Вводятся так называемые δ-инструменты $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})$ с обобщенными n-мерными δ-функциями относительно $\boldsymbol{s}$ в качестве платежных, т.е.

$$\pi\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})\right)=\delta(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s})=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}),\ \text{при этом}\ \left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})\right|=c(\boldsymbol{s}),\ \left\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})\right\|=p(\boldsymbol{s}).$$

Инструменты $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{s}\in\mathsf{X}$, играют роль базисных, и инструмент (портфель) $\boldsymbol{G}$ с произвольной измеримой платежной функцией $g(\boldsymbol{x})$ имеет вид

(1) $$\boldsymbol{G}=\int_{\mathsf{X}} g(\boldsymbol{s})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s},\ \text{при этом}\ |\boldsymbol{G}|=\int_{\mathsf{X}} g(\boldsymbol{s})c(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s},\quad \|\boldsymbol{G}\|=\int_{\mathsf{X}} g(\boldsymbol{s})p(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s}.$$

В частности, рассматриваются такие инструменты, как *индикаторы множеств* $\boldsymbol{H}\{M\}$, $M\subset\mathsf{X}$, и единичный безрисковый актив $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{H}\{\mathsf{X}\}$:

$$\boldsymbol{H}\{M\}=\int_M \boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{U}=\boldsymbol{H}\{\mathsf{X}\},\quad |\boldsymbol{U}|=\mathsf{C}\{\mathsf{X}\}=\int_{\mathsf{X}} c(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s}=1/r,$$

где r имеет смысл безрискового дохода за период.

Без ущерба для общности принимается $r \equiv 1$. Такое упрощение на многомерном рынке может быть оправдано лишь в силу неявного предположения о том, что на нем допустима *только* совместная торговля всех базовых активов. Даже если в описании конкретной сделки на рынке фигурирует лишь часть базовых активов, имеется в виду, что в ней участвуют одновременно и остальные базовые активы в форме безрисковых единичных инструментов. Такое предположение не позволяет говорить о доходностях отдельных активов. Сама стоимостная плотность не содержит информации о сравнительной средней доходности для разных базовых активов, а лишь информацию о коллективной доходности r всей их совокупности, что и позволяет прибегнуть к упрощению. Иначе речь должна идти о раздельно функционирующих рынках.

На теоретическом рынке в соответствии с (1) может быть сконструирован практически любой инструмент. По аналогии с одномерным рынком можно вводить и опционы. Некоторая специфика, тем не менее, имеется, но об этом позже.

3. Пример оптимизации по CC-VaR на δ-рынке

Продемонстрируем работу многомерного алгоритма оптимизации – аналога алгоритма для одномерного рынка – на примере применения CC-VaR на двумерном δ-рынке, очевидным образом приспосабливая обозначения.

Пусть X, Y – множества значений двух базовых активов, при этом $\mathsf{X} = \mathsf{Y} = [-1, 1]$. На $\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$ заданы *стоимостная* и *прогнозная* плотности, и образуем из них *функцию относительных доходов* соответственно. Имеем

$$c(x,y)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{x-y}{16},\ p(x,y)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{x+y}{16},\ \rho(x,y)=\tfrac{p(x,y)}{c(x,y)}=\tfrac{4+x+y}{4+x-y},\ x\in\mathsf{X},\ y\in\mathsf{Y}.$$

Параметризация $\rho(x, y) = \tau$, где $\tau\in[\tau', \tau'']$, $\tau' = ½$, $\tau'' = 2$, в двумерном случае порождает семейство множеств

$$Z(\tau) = \left\{ (x, y) \middle| \rho(x, y) \le \tau \right\},\ \tau\in[\tau', \tau''].$$

Решение неравенств в условии правой части позволяет уточнить вид множеств:

$$Z(\tau) = \left\{ (x, y) \middle| \begin{array}{lll} -1 < y < \frac{-4+4\tau-x+\tau x}{1+\tau}, & -1 < x < \frac{3-5\tau}{-1+\tau}, & \frac{1}{2} < \tau \le \frac{2}{3}; \\ -1 < y < \frac{-4+4\tau-x+\tau x}{1+\tau}, & -1 < x < 1, & \frac{2}{3} < \tau \le \frac{3}{2}; \\ -1 < y < \frac{-4+4\tau-x+\tau x}{1+\tau}, & -1 < x < \frac{5-3\tau}{-1+\tau}, & \frac{3}{2} < \tau \le 2; \\ -1 < y < 1, & \frac{5-3\tau}{-1+\tau} < x < 1, & \frac{3}{2} < \tau \le 2. \end{array} \right.,$$

Вычисление меры $\mathsf{P}\{Z(\tau)\}$, $\tau\in[\tau', \tau'']$, надлежащим интегрированием дает связь параметра τ с уровнем вероятности ε, т.е. *прогнозную функцию* (относительных доходов)

$$\text{(2)} \qquad \mathsf{f_P}(\tau)(=\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{(1-2\tau)^2(-1-4\tau+3\tau^2)}{12(-1+\tau^2)^2}, & \frac{1}{2} < \tau \le \frac{2}{3}; \\ \frac{7(-1-2\tau+6\tau^2)}{12(1+\tau)^2}, & \frac{2}{3} < \tau \le \frac{3}{2}; \\ -\frac{(-2+\tau)(1+4\tau)(1-2\tau+3\tau^2)}{12(-1+\tau^2)^2} + \frac{6-13\tau+6\tau^2}{4(-1+\tau)^2}, & \frac{3}{2} < \tau \le 2. \end{cases}$$

Ключевым значениям аргумента $\tau = 1/2, 2/3, 3/2, 2$ отвечают соответственно значения прогнозной функции $\varepsilon = 0, 7/100, 133/150, 1$.

Фактически, построена система оптимальных двумерных множеств $\{Q_\varepsilon, \varepsilon\in[0, 1]\}$, где $Q_\varepsilon = \mathrm{Z}(\tau)$ с $\mathsf{P}\{Q_\varepsilon\} = \varepsilon$, если $\varepsilon = \mathsf{f_P}(\tau)$, $\tau\in[\tau', \tau'']$. Граничные точки множества Q_ε при каждом $\varepsilon\in[0, 1]$ образуют некоторую линию (возможно, разрывную) в квадрате $\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$, на которой функция $\rho(x, y)$ принимает одно и то же значение.

В соответствии с теоретическим алгоритмом оптимизации [3,4] функция упорядочения и оптимальная весовая функция определяются соответственно равенствами

$$w(x, y) = \mathsf{f_P}(\rho(x, y)),\ x\in\mathsf{X},\ y\in\mathsf{Y},$$

$$\text{(3)} \qquad g(x, y) = \phi(w(x, y)) = \phi(\mathsf{f_P}(\rho(x, y))) = \phi\left(\mathsf{f_P}\left(\tfrac{4+x+y}{4+x-y}\right)\right).$$

Стоимостная функция (относительных доходов) находится, как и прогнозная, надлежащим интегрированием, реализующим на этот раз вычисление меры $\mathsf{C}\{\cdot\}$ множеств $Z(\tau)$, $\tau\in[\tau', \tau'']$. Имеем

$$\text{(4)} \qquad \mathsf{f_C}(\tau) = \mathsf{C}\{Q_\varepsilon\} = \begin{cases} \frac{1}{24}\left(-16 + \frac{1}{(-1+\tau)^2} + \frac{27}{(1+\tau)^2}\right), & \frac{1}{2} < \tau \le \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{12}\left(19 - \frac{49}{(1+\tau)^2}\right), & \frac{2}{3} < \tau \le \frac{3}{2}; \\ \frac{6-13\tau+6\tau^2}{4(-1+\tau)^2} - \frac{(-2+\tau)(3-11\tau+11\tau^2+7\tau^3)}{12(-1+\tau^2)^2}, & \frac{3}{2} < \tau \le 2. \end{cases}$$

Значениям аргумента $\tau = 1/2, 2/3, 3/2, 2$ отвечают соответственно значения стоимостной функции 0, 17/150, 93/100, 1.

Наконец, *диссонанта* $\gamma(\cdot)$ должна определяться из (2) и (4) как $\gamma(\varepsilon) = \mathsf{f_C}(\mathsf{f_P}^{\leftarrow}(\varepsilon))$, $\varepsilon\in[0, 1]$, поскольку $\mathsf{f_C}(\tau) \equiv \gamma(\mathsf{f_P}(\tau))$, $\tau\in[\tau', \tau'']$. Однако выразить ее аналитически уже не удается. Для ее (приближенного) нахождения следует использовать численные методы, которые удобнее связывать с построением (подробного) сценарного рынка.

Средний доход R, определяемый лишь ф. р. п. инвестора, вычисляется привычным образом. Окончательный результат дается для $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^{\lambda}$, $\lambda > 0$:

$$R = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\varepsilon = (1+\lambda)^{-1}.$$

Инвестиционная сумма A и средняя доходность y оптимального портфеля находятся использованием представлений (2) и (4) с предварительной трансформацией в операции интегрирования суперпозиции функций. Имеем соответственно

$$A = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\gamma(\varepsilon) = \int_{\tau'}^{\tau''} \phi\big(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)\big)\, d\mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau),\ \ y = R/A - 1 > 0 .$$

Оптимальный портфель двумерных δ-инструментов дается, как и в одномерном случае, представлением

$$\boldsymbol{G} = \int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} g(x, y)\, \boldsymbol{D}(x, y)\, dxdy ,$$

где $g(x, y)$ определяется формулой (3).

Таким образом, при решении задачи оптимизации на теоретическом δ-рынке в данном примере с несколько «неестественными» плотностями нам удается продвинуться достаточно далеко в получении аналитического решения, однако подобрать подобные примеры бывает не так уж легко, не говоря уже о решении более-менее реальных задач. Поэтому возникает потребность в нахождении решения задачи оптимизации численно. Именно так мы должны были поступить, в частности, с вычислением диссонанты.

4. Многомерные опционы и их производные

Особый интерес представляет проблема определения на δ-рынке многомерных аналогов обычных опционов. Структура базисных инструментов $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})$ подсказывает нам решение. Вводятся так называемые α-опционы, задаваемые следующим образом. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – векторы соответственно цен базовых активов $x_i \in \mathsf{X}_i$, страйков $s_i \in \mathsf{X}_i$, $i \in N$, и чисел -1 и $+1$ в любом порядке, характеризующих тип опциона. Тогда α-опцион $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ определяется как инструмент, платежная функция которого определяется соотношением

(5) $$a(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s};\boldsymbol{\alpha}) = \pi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s};\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s};\boldsymbol{\alpha})) = \prod_{i\in N} \max\big(0, \alpha_i (x_i - s_i)\big).$$

Это значит, что для α-опциона справедливо представление

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s};\alpha) = \int_{\Re^n} a(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s};\alpha)\, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} .$$

Векторный параметр $\boldsymbol{\alpha}$ характеризует тип опциона (подобно одномерным опционам, принимающим обличье колла или пута). При этом α-опцион по i-й координате (i-му базовому активу) при $\alpha_i = +1$ ведет себя как обычный колл, при $\alpha_i = -1$ – как пут.

С учетом определения (5) сам α-опцион в таком случае приобретает вид

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s};\alpha) \equiv \prod_{i\in N} \boldsymbol{O}_i^{\alpha_i}(s_i),\ \boldsymbol{O}_i^{\alpha_i}(s_i) \equiv \{\boldsymbol{C}_i(s_i),\ \alpha_i = +1;\quad \boldsymbol{P}_i(s_i),\ \alpha_i = -1\} .$$

Замечание. Следует обратить внимание на финансовую размерность возникающих конструкций. Построение многомерных δ-инструментов предполагает перемножение одномерных доходов и их валют. Кажущаяся бессмысленность этого не должна смущать читателя. Само введение δ-инструментов (и прочих базисных инструментов) предполагает, что они нормированы и потому безразмерны. Поэтому центр тяжести в проблеме размерности смещается в сторону весовых коэффициентов портфелей. И их размерность должна совпадать с размерностью цен. Итак: *доходы от многомерных опционов и их цен измеряются в единой валюте, вовсе не обязательно связанной с валютами (возможно, разными) базовых активов*.

Первая $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ *и вторая* $\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ производные от α-опциона $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$, как инструменты, определяется как инструменты с платежными функциями, равными смешанной производной первого порядка от $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ по всем компонентам $\boldsymbol{x}$; и второго порядка соответственно. При этом $\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})$, и потому опционы $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ могут образовывать базис из α-опционов. Также и опционы $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ могут образовывать базис из ζ-опционов – многомерных аналогов бинарных опционов. (Термин «производная» мы здесь понимаем как в финансовом, так и в математико-аналитическом смысле.)

5. Заключение

Работа знакомит читателя с проблемой применения методологии CC-VaR в задачах построения оптимального портфеля инвестора на рынках с несколькими базовыми активами. Основное внимание уделяется континуальному идеальному теоретическому рынку, определению многомерных инструментов в целом и опционов в частности. Приводятся определения производных от многомерных опционов, понимаемых в математико-аналитическом смысле. Хотя, например, многомерные опционы определяются много сложнее обычных одномерных опционов, таких как колл и пут, алгоритм, по существу, остается прежним и основанным на применении процедуры Неймана-Пирсона к функции относительного дохода. На примере двумерного рынка демонстрируется все этапы построения оптимального двумерного портфеля аналитическими, за небольшим исключением, средствами. Такой подход хорошо демонстрирует процесс формирования решения задачи оптимизации по CC-VaR, но подобрать даже иллюстративные примеры, решаемые аналитически, к сожалению, весьма затруднительно. Что уж говорить в таком случае о реальных системах! И без использования численных методов не обойтись. В этом отношении нам представляется наилучшим вариант с дискретизацией теоретического рынка путем построения сценарного рынка, как более естественного при решении реальных задач [3,4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00816).

Список литературы

1. Agasandian G.A. Optimal Behavior of an Investor in Option Market // International Joint Conference on Neural Networks // The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, May 12-17, 2002). P. 1859-1864.
2. Агасандян Г.А. Финансовая инженерия и континуальный критерий VaR на рынке опционов // Экономика и математические методы. 2005. Т. 41, №4. С. 88-98.
3. Агасандян Г.А. Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.
4. Агасандян Г.А. Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов. М.: ВЦ РАН, 2015. 297 с.
5. Крамер Г. Математические методы статистики / Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 750 с. (Cramer H. Mathematical methods of statistics. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.)