УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А.А. Чикрий
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины
Украина, 03187, Киев, Академика Глушкова пр., 40
E-mail: g.chikrii@gmail.com

Ключевые слова: конфликтно-управляемый процесс, дробная производная, многозначное отображение, условие Понтрягина, разрешающая функция, матричная функция Миттаг-Леффлера.

Аннотация: Рассматриваются квазилинейные конфликтно-управляемые процессы общего вида, охватывающие, в частности, системы с дробными производными Римана-Лиувилля, Джрбашяна-Нерсесяна-Капуто, Миллера-Росса, Хильфера, Грюнвальда-Летникова. Изучается ситуация, когда не выполнено условие Понтрягина. В этом случае введены функции сдвига, верхние и нижние разрешающие функции, что позволило получить на основе техники многозначных отображений и их селекторов достаточные условия завершения игры за конечное время в классе квази и стробоскопических стратегий. Результаты иллюстрируются на примере игровой задачи сближения с дробной динамикой.

1. Введение

В математической теории управления, в том числе, для исследования конфликтных ситуаций разработано ряд фундаментальных методов. Как правило, в исходном варианте они относились к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Стремление обобщить теоретические результаты и расширить круг приложений привело к изучению процессов с более сложной динамикой: импульсных и дифференциально-разностных систем, систем интегральных уравнений и уравнений с распределенными параметрами.

Одним из важных классов функционально-дифференциальных систем являются системы уравнений с дробными производными, предназначенные, в основном, для описания процессов в вязко-упругих средах. В этом направлении следует выделить обзорные работы [1, 2], касающиеся управляемых процессов. В игровой ситуации линейные системы с классическими дробными производными Римана-Лиувилля рассмотрены в работе [3], их регуляризованный вариант исследован в [4], секвенциальные дробные производные Миллера-Росса [5] и производные Хильфера изучены в статье [6], дискретным процессам с производными Грюнвальда-Летникова посвящена работа [7].

Данная работа развивает упомянутые исследования и связана с изучением конфликтно-управляемых процессов с различными дробными производными. Чтобы уложить в единую схему все упомянутые выше производные базовым объектом для исследования выбрано представление решения динамической системы. При конкретных значениях параметров этого представления получаем тот или иной тип дробных производных. Математической основой для исследования игровых задач является метод разрешающих функций [8].

2. Постановка задачи, схема метода, формулировка результата

Рассмотрим в конечномерном евклидовом пространстве R^n конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого задается равенством:

(1) $$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))d\tau, \ t \ge 0.$$

Здесь $z(t) \in R^n$, функция $g(t), g: R_+ \to R^n$, $R_+ = \{t : t \ge 0\}$, измерима по Лебегу и ограничена при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t,\tau)$, определена на множестве $\Delta = \{(t,\tau) : t \ge \tau \ge 0\}$, она измерима по t и суммируема по τ для каждого $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u,v), \varphi : U \times V \to R^n$, которая предполагается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, $U \in K(R^m)$, $V \in K(R^l)$, n, m, l - натуральные числа.

Допустимые управления игроков $u(\tau), u: R_+ \to U$, $v(\tau), v: R_+ \to V$ - измеримые функции времени.

Задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид:

(2) $$M^* = M_0 + M,$$

где M_0 – линейное подпространство из R^n, $M \in K(L)$, L – ортогональное дополнение к M_0 в R^n.

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый старается вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество за кратчайшее время, а второй – максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^* или вообще избежать встречи.

Приведем пример системы дробного порядка, решение которой имеет вид (1). Пусть $\beta \in (0,1)$, $D^\beta z$ - регуляризованная дробная производная Джрбашяна-Нерсесяна-Капуто [4] порядка β и конфликтно-управляемый процесс:

$$D^\beta z = Cz + \varphi(u,v), \ z \in R^n, \ u \in U, \ v \in V,$$

с начальными данными Коши:

$$z(0) = z_0.$$

Тогда при выбранных допустимых управлениях игроков траектория процесса представима в виде [4]:

(3) $$z(t) = E_{1/\beta}(Ct^\beta; 1)z_0 + \\ + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}(C(t-\tau)^\beta; \beta)\varphi(u(\tau), v(\tau))d\tau,$$

где $E_\rho(B;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)}$ обобщенная матричная функция Миттаг-Леффлера, а $\Gamma(\nu)$ - гамма-функция Эйлера. Формула (3) является частным случаем представления (1).

Примем сторону первого игрока. Если игра происходит на интервале $[0,T]$, то управление первого игрока в момент τ выбираем на основании информации о $g(T)$ и $v_\tau(\cdot)$ в виде измеримой функции:

$$u(\tau)=u(g(T),v_\tau(\cdot)),\ \tau\in[0,T],\ u(\tau)\in U,$$

где $v_\tau(\cdot)=\{v(s):s\in[0,\tau]\}$, или в виде измеримого контруправления:

$$u(\tau)=u(g(T),v(\tau)),\ \tau\in[0,T],\ u(\tau)\in U.$$

В первом случае говорят о квазистратегии, во втором – о стробоскопической стратегии. Цель работы – установить достаточные условия разрешимости игровой задачи сближения в пользу первого игрока.

Обозначим π - ортопроектор, действующий из R^n в L. Положив $\varphi(U,v)=\{\varphi(u,v):u\in U\}$, рассмотрим многозначные отображения:

$$W(t,\tau,v)=\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v),\ W(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}W(t,\tau,v),\ (t,\tau)\in\Delta,\ v\in V.$$

Условие Понтрягина. $W(t,\tau)\neq\emptyset$ для всех $(t,\tau)\in\Delta$.

В силу свойств параметров процесса (1) отображение $W(t,\tau)$ является измеримым по $\tau,\tau\in[0,t]$, и замкнутозначным на Δ. Поэтому в нем существует хотя бы один измеримый по $\tau,\tau\in[0,t]$, селектор $\gamma(t,\tau)$ - селектор Понтрягина, который суммируем по τ [9]. Если условие Понтрягина не имеет места, то зафиксируем функцию с такими же свойствами и назовем ее функцией сдвига.

Обозначим $\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))=\pi g(t)+\int_0^t\gamma(t,\tau)d\tau$ и рассмотрим многозначное отображение:

(4) $$\mathrm{A}(t,\tau,v)=\{\alpha\ge 0:[W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)]\cap\alpha[M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))]\neq\emptyset\}.$$

Будем предполагать, что $\mathrm{A}(t,\tau,v)\neq\emptyset$ на $\Delta\times V$. Если выполнено условие Понтрягина, то это имеет место автоматически. Верхнюю и нижнюю опорные функции отображения $\mathrm{A}(t,\tau,v)$ в направлении +1:

$$\alpha^*(t,\tau,v)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathrm{A}(t,\tau,v)\},\ \alpha_*(t,\tau,v)=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathrm{A}(t,\tau,v)\}$$

назовем разрешающими функциями первого типа [10].

Из определения (4) следует, что если выполнено условие Понтрягина, то $\alpha_*(t,\tau,v)\equiv 0$, а если к тому же $\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\in M$, то $\mathrm{A}(t,\tau,v)=[0,+\infty]$, а $\alpha^*(t,\tau,v)=+\infty$ для $\tau\in[0,T],v\in V$. Эта ситуация соответствует первому прямому методу Понтрягина. Учитывая свойства параметров конфликтно-управляемого процесса (1), (2), теоремы о характеризации и обратном образе [9], можно показать, что многозначное отображение $\mathrm{A}(t,\tau,v)$ является $L\times B$ - измеримым по совокупности $(\tau,v),\tau\in[0,T],v\in V$, а функция $\alpha^*(t,\tau,v)$, $\alpha_*(t,\tau,v)$ $L\times B$ - измеримы по совокупности (τ,v) в силу теоремы об опорной функции [9]. Рассмотрим множество:

(5) $$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge 0:\inf_{v(\cdot)}\int_0^t\alpha^*(t,\tau,v(\tau))d\tau\ge 1\},$$

нижняя грань берется по всем допустимым управлениям убегающего с учетом того, что $\alpha^*(t,\tau,v)$ является суперпозиционно измеримой. Если при некотором t функция $\alpha^*(t,\tau,v)$ обращается в $+\infty$, то значение интеграла в (5) естественно положить равным $+\infty$ и неравенство выполнено автоматически.

Обозначим $\mathsf{A}(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}\mathsf{A}(t,\tau,v)$, $(t,\tau)\in\Delta$. Введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа [10]:

$$\alpha^*(t,\tau)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathsf{A}(t,\tau)\},\ \alpha_*(t,\tau)=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathsf{A}(t,\tau)\}.$$

Они измеримы по τ и порождают функции:

$$\alpha^*(t)=\int_0^t\alpha^*(t,\tau)d\tau,\ \alpha_*(t)=\int_0^t\alpha_*(t,\tau)d\tau,\ t>0.$$

Теорема. *Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполняется условие* $\mathsf{A}(t,\tau)\neq\varnothing$ *для заданной функции* $g(\cdot)$ *и функции сдвига* $\gamma(\cdot,\cdot)$ *существует* $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)\neq\varnothing$.

Тогда при $\alpha_*(T)<1$ *траектория (1) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент* T *с помощью подходящей квазистратегии, если к тому же* $\alpha^*(T)\geq 1$ *– то в классе стробоскопических стратегий.*

Заметим, что если выполнено условие Понтрягина, то функция сдвига является селектором Понтрягина [8] и нижняя разрешающая функция второго типа тождественно равна нулю, а если к тому же отображение $\mathsf{A}(t,\tau,v)$ выпуклозначно, то для верхних разрешающих функций имеет место равенство:

$$\inf_{v\in V}\alpha^*(t,\tau,v)=\alpha^*(t,\tau),\ \ (t,\tau)\in\Delta.$$

Результаты иллюстрируются на примере системы дробного порядка с простой матрицей и шарообразными областями управления.

3. Заключение

На основе метода разрешающих функций для игровых задач сближения общего вида получены достаточные условия их разрешимости за конечное время. Эти условия могут быть конкретизированы для систем дробного порядка различных типов. результаты иллюстрируются на модельном примере.

Список литературы

1. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. 2013. № 4. С. 3-42.
2. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 3-34.
3. Chikrii A.A. Optimization of Game Interaction of Fractional-Order Controlled Systems // Optimization Methods and Software. 2008. Vol. 23, No. 1. P. 39-72.
4. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives // Springer Optimization and its Applications. 2008. Vol. 17. P. 349-386.
5. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. 2010. Vol. 268. Suppl. 1. P. 54-70.
6. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Gromaszek K., Smolarc L. Control of Fractional-Order Dynamic Systems under Uncertainty // Modeling and Optimization. Lublin University of Technology. Poland. 2011. P. 3-56.
7. Zhukovskiy V.J., Chikrii A.A. On discrete conflict-controlled processes described by Grunwald-Letnikov fractional systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2015. Vol. 47. No.1. P.24-34.

8. Chikrii A.A. An Analytical Method in Dynamic Pursuit Games // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2010. Vol. 271. P. 69-85.
9. Aubin J.-P., Frankowska H. Set –valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser. 1990. 461 p.
10. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image Structure of Multivalued Mapping in Game Problems of Motion Control // Journal of Automation and Information Sciences. 2016. Vol. 48, No. 3. P. 20-35.