УДК 519.833.2

ПАРЕТОВСКИЕ РАВНОВЕСИЯ УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ТРЕХ ЛИЦ

В.И. Жуковский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Россия, 119991, Москва, ул. Воробьевы горы, д. 1, стр. 52

E-mail: zhkvlad@yandex.ru

С.П. Самсонов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Россия, 119991, Москва, ул. Воробьевы горы, д. 1, стр. 52

E-mail: samsonov@cs.msu.su

Ключевые слова: бескоалиционные игры, равновесие по Нэшу, активное равновесие, равновесие угроз и контругроз.

Аннотация: Отсутствие внешней и внутренней устойчивости множества равновесных по Нэшу ситуаций приводит неизбежно к формализации новых понятий равновесных решений в бескоалиционных играх. Одному из таких равновесий и посвящена настоящая работа. В ней приведен пример дифференциальной линейно-квадратичной позиционной игры трех лиц, в которой найден явный вид равновесия угроз и контругроз и доказано отсутствие в этой игре ситуации равновесия по Нэшу. Предполагается в дальнейшем предложенным способом исследовать вопрос устойчивости коалиционных структур в дифференциальной игре трех лиц.

По мнению корифеев математической теории игр равновесию, как решению дифференциальной игры должно быть присуще свойство устойчивости: отклонение от него отдельного игрока не может увеличить выигрыш отклонившегося. Однако даже «царствующее» здесь равновесие по Нэшу не обладает этим свойством. Так в бескоалиционной игре двух лиц

$$\left\langle \{1,2\}, \{X_i = [-1,+1]\}_{i=1,2}, \{f_i(x_1,x_2) = 2x_1x_2 - x_i^2\}_{i=1,2} \right\rangle$$

множество X^e равновесных по Нэшу ситуаций

$$X^e = \{(\alpha,\alpha) | \, \forall \alpha = const \in [-1,1]\},$$

во-первых, внутренне неустойчиво, ибо для $x^{(1)} = (0,0)$ и $x^{(2)} = (1,1)$ будет $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1$ $(i = 1,2)$ и поэтому X^e *внутренне неустойчиво. Во-вторых*, $f_i(x^{(1)}) = f_i(0,0) = 0 < f_i(\frac{1}{4},\frac{1}{3})$ $(i = 1,2)$ и поэтому X^e *внешне неустойчиво.*

Избежать последствия внутренней и внешней неустойчивости X^e позволила бы максимальность по Парето элементов X^e. Однако максимальность по Парето и одновременно равновесность по Нэшу явление скорее экзотическое для бескоалиционных дифференциальных игр. Поэтому в предлагаемом сообщении рассматривается равновесие угроз и контругроз (РУИК), обладающее указанным свойством устойчивости и, в отличие от равновесия по Нэшу, оптимальностью по Парето.

Теоретической основой настоящего доклада являются работы по коалиционным играм [1–3] и по дифференциальным играм – [4–6].

Рассматриваем линейно-квадратичную дифференциальную позиционную игру трех лиц в нормальной форме.

$$\Gamma_3 = \left\langle \{1,2,3\}, \mathbf{\Sigma}, \{\mathfrak{U}_i\}_{i=1,2,3}, \{J_i(U,t_0,x_0)\}_{i=1,2,3} \right\rangle,$$

где управляемая динамическая система $\mathbf{\Sigma} \div \dot{x} = A(t)x + \sum\limits_{i=1}^{3} u_i,\ x(t_0) = x_0,\ A(\cdot) \in$ $\in C_{n\times n}[o,\vartheta];\ x,u \in \mathbb{R}^n,\ \vartheta = const > 0,\ 0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ (t,x) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$ – позиция игры, (t_0,x_0) – начальная позиция; $\mathfrak{U}_i = \{U_i \div u_i(t,x) = Q_i(t)x | \forall Q(\cdot) \in C_{n\times n}[o,\vartheta]\};\ u_i[t] =$ $= Q_i(t)x(t);\ U = (U_1,U_2,U_3) \in \mathfrak{U} = \prod\limits_{i=1}^{3} \mathfrak{U}_i,\ u \div U(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x)),$

$$J_i(U,t_0,x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{3} u_j'[t] D_{ij} u_j[t] dt \quad (i = 1,2,3).$$

Перейдем к формализации:

1) U^P – **максимально по Парето** в $\Gamma_3 : \forall U \in \mathfrak{U}$ несовместна система неравенств $J_i(U,t_0,x_0) \geqslant J_i(U^P,t_0,x_0)$ $(i = 1,2,3)$, из которых, по крайней мере, одно строгое.

2) **Угроза 1-го на** U^P: $\exists U_1^t \in \mathfrak{U}_1$,

$$J_1(U_1^t, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) > J_1(U^P, t_0, x_0) \quad \forall (t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0_n;$$

Контругроза (полная) 2-го на угрозу 1-го: $\exists U_2^c \in \mathfrak{U}_2 : J_1(U_1^t, U_2^c, U_3^P, t_0, x_0) <$ $< J_1(U^P,t_0,x_0) \wedge J_2(U_1^t, U_2^c, U_3^P, t_0, x_0) > J_2(U_1^t, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0)$.

Определение 1. *Ситуация* $U^P = \left(U_1^P, U_2^P, U_3^P\right)$ *называется равновесной по угрозе и контругрозе (РУИК) для* Γ_3, *если при* $\forall (t_0,x_0) \in \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$

1) U^P *максимальна по Парето для* Γ_3*;*

2) в ответ на любую угрозу на U^P *любого игрока хотя бы у одного из оставшихся имеется полная контругроза.*

Далее $D > 0$ (< 0) означает, что квадратичная форма $u'Du$ определенно положительна (отрицательна); постоянные $n \times n$ - матрицы D_{ij}, C_i $(i,j = 1,2,3)$ в Γ_3 симметричны, тогда корни характеристических уравнений $\det[D_{ij} - \lambda E_n] = a_0\lambda^n +$ $+ a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ вещественны; кроме того $D_{ii} > 0 \Rightarrow \Lambda_{ii} = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} a_i/a_{i-1}$ и $D_{ij} < 0 \Rightarrow u_j' D_{ij} u_j \leqslant -\lambda_{ij} ||u_j||^2$ (Λ_{ii} и $-\lambda_{ij}$ – наибольшие корни соответствующих характеристических уравнений), числа $\Lambda_{ii} > 0$, $\lambda_{ij} > 0$ $(i,j = 1,2,3; j \neq i)$. Далее используем векторную и матричные однородные системы уравнений $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$,

$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t)$, $X(\vartheta) = E_n$; $\frac{d(X^{-1}(t))'}{dt} = -A(t)'(X^{-1}(t))'$, $\frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -X^{-1}(t)A(t)$, $X^{-1}(\vartheta) = (X^{-1}(\vartheta))' = E_n$, $n \times n$ матрицы $C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3$, $D_i = D_{i1} + \beta D_{i2} + \gamma D_{i3}$, $(i = 1, 2, 3)$, числа $\beta = \frac{1}{2}\left\{\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right\}$, $\gamma = \frac{1}{2}\left\{\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2}\left[\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right]\frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\right\}$.

Теорема 1. *Пусть в Γ_3 матрицы $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$, $C_i < 0$ $(i, j = 1, 2, 3; j \neq i)$ и $\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \lambda_{12}\lambda_{21}$. Тогда U^P в РУИК существует и имеет вид $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \div$ $\div(-D_1^{-1}\Theta(t)x, -D_2^{-1}\Theta(t)x, -D_3^{-1}\Theta(t)x)$, здесь симметричная $n \times n$ матрица*

$$\Theta(t) = \left[X^{-1}(t)\right]' \left\{C^{-1} + \int\limits_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau)\left(D_1^{-1} + D_3^{-1} + D_3^{-1}\right)\left(X^{-1}(\tau)\right)' d\tau\right\}^{-1} X^{-1}(t).$$

Список литературы

1. Льюс Р.Д. и Райфа Х. Игры и решения. М.: ИЛ, 1961. 641 с.
2. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, ЛКИ/URSS. 2010. 216 с.
3. Вилкас Э.И., Майминас Е.З. Решения: теория, информация, моделирование М.: Радио и Связь, 1981. 328 с.
4. Вайсборд Э.М. О коалиционных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 4. С. 613-623.
5. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложение М.: Советское Радио, 1980. 304 с.
6. Vaisbord E.M., Zhukovskiy V.I. Introduction to Multi Player Differential Games and thier Application. New York: Gordon and Breach, 1983. 581 p.