УДК 517.978.4

К ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ В КЛАССЕ ПОЗИЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ С ПОВОДЫРЕМ

Н.Н. Петров
Удмуртский государственный университет
Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1
E-mail: kma3@list.ru

Н.А. Соловьева
Удмуртский государственный университет
Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1
E-mail: solov_na@mail.ru

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, управление с поводырем, рекуррентная функция.

Аннотация: Рассматривается задача о преследовании группой преследователей одного убегающего в линейной нестационарной дифференциальной игре с равными возможностями всех участников. В предположении, что фундаментальная матрица системы является рекуррентной получены достаточные условия разрешимости задачи преследования в классе позиционных стратегий с поводырем.

1. Введение

К настоящему времени [1-3] предложены различные формализации дифференциальной игры, которые различаются, в частности, принимаемой в них информированностью игроков. Во многих работах [1-5], посвященных задачам группового преследования предполагается, что все преследователи в каждый момент времени знают управление убегающего либо в данный момент времени, либо на всем промежутке течения игры вплоть до заданного момента, т.е. преследователи знают предысторию игры. Данная формализация конфликтного взаимодействия не всегда является естественной. Наиболее реальным является предположение о знании фазовых координат участников и использование участниками игры позиционных стратегий. Использование позиционных стратегий приводит в значительным трудностям в исследовании задач группового преследования.

В работе [6] рассматривалась игра двух лиц, для анализа которой была введена вспомогательная дифференциальная игра (система-поводырь), по движению которой преследователь в некоторые фиксированные моменты времени корректировал свою траекторию по реализовавшимся в данный момент времени позициям исходной и вспомогательной игр. Во вспомогательной игре преследователь строил свое управление, зная управление убегающего.

В работе [7] система-поводырь была применена для исследования задачи простого группового преследования, а в работе [8] для исследования задачи группового преследования в линейной стационарной дифференциальной игре.

В данной работе рассматривается линейная нестационарная задача группового преследования, для которой получены условия разрешимости задачи преследования как в классе квазистратегий, так и в классе позиционных стратегий с поводырем.

2. Постановка задачи

В пространстве $R^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E описываемая системой вида

$$(1) \qquad \dot{z}_i = A(t) z_i + u_i - v,\ \ u_i, v \in V,\ \ z_i(t_0) = z_i^0.$$

Здесь $z_i, z_i^0, u_i, v \in R^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, причем $z_i^0 \notin M_i$, где $M_i \subset R^k$ — выпуклый компакт.

Кроме того, будем рассматривать вспомогательную дифференциальную игру $\tilde{\Gamma}$, в которой участвуют преследователи $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$ и убегающий $\tilde{E}$, которая описывается системой вида

$$(2) \qquad \dot{w}_i = A(t) w_i + \tilde{u}_i - \tilde{v}, \quad , \tilde{u}_i, \tilde{v} \in V, \quad w_i(t_0) = w_i^0.$$

В системе (2) матрица $A(t)$, множество V такие же как в системе (1).

Измеримая функция $v : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется допустимой, если $v(t) \in V$ для всех $t \geqslant t_0$. Назовем предисторией $\tilde{v}_t(\cdot)$ убегающего $\tilde{E}$ в момент t, $t \in [t_0, \infty)$ сужение функции $\tilde{v}$ на отрезок $[t_0, t]$.

Определение 1. *Квазистратегией $\tilde{U}_i$ преследователя $\tilde{P}_i$ называется отображение $\tilde{U}_i(t, w_1^0, \ldots, w_n^0, \tilde{v}_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $w^0 = (w_1^0, \ldots, w_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $\tilde{v}_t(\cdot)$ убегающего $\tilde{E}$ измеримую функцию $\tilde{u}_i(t)$ со значениями в V.*

Определим далее позиционные стратегии с поводырем на отрезке $[t_0, T]$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ в игре Γ. Пусть $\Delta = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_r = T\}$ — разбиение отрезка $[t_0, T]$. На промежутке $[\tau_0, \tau_1]$ выбираем постоянные управления $u_i^0(t) = U_i(z_i^0, w_i^0, i \in I)$ преследователей $P_i, i \in I$ Выбранное управление $u_i^0(t)$ в паре с некоторым управлением $v(t), t \in [\tau_0, \tau_1]$ убегающего E порождает движение $z_i(t), t \in [\tau_0, \tau_1]$ системы (1) на $[\tau_0, \tau_1]$.

На отрезке $[\tau_0, \tau_1]$ в системе (2) задаем управление $\tilde{v}(t)$ убегающего $\tilde{E}$ и квазистратегии $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_n$ преследователей $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$. Тем самым определены функции $w_i(t), i \in I$ — решения системы (2) на отрезке $[\tau_0, \tau_1]$. В момент $t = \tau_1$ по значениям $z_1(\tau_1), \ldots, z_n(\tau_1)$, $w_1(\tau_1), \ldots, w_n(\tau_1)$ выбираем постоянные управления $u_1^1(t) = U_i(z_i(\tau_1), w_i(\tau_1), i \in I)$, $\quad t \in [\tau_1, \tau_2]$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ в игре Γ. Выбранные управления $u_i^1(t), i \in I$ преследователей $P_i, i \in I$ в паре с некоторым управлением $v(t), t \in [\tau_1, \tau_2]$ убегающего E порождают движение $z_i(t)$ системы (1) на $[\tau_1, \tau_2]$.

На отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ в системе (2) задаем управление $\tilde{v}(t)$ убегающего $\tilde{E}$ и квазистратегии $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_n$ преследователей $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$. Тем самым определены функции $w_i(t), i \in I$ — решения системы (2) на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$. Пусть $z_i(\tau_s), w_i(\tau_s), i \in I$ — позиции, в которые пришли система (1) и система-поводырь (2) в момент $t = \tau_s$. В момент $t = \tau_s$ по значениям $z_i(\tau_s), w_i(\tau_s), i \in I$ выбираем постоянные управления $u_i^s(t) = U_i(z_i(\tau_s), w_i(\tau_s), i \in I), \quad t \in [\tau_s, \tau_{s+1})$ преследователей $P_i, i \in I$ в игре Γ.

В системе (2) задаем управления $\tilde{v}(t)$ убегающего $\tilde{E}$ и квазистратегии $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_n$ преследователей $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$ на промежутке $[\tau_s, \tau_{s+1})$. Продолжаем данный процесс до момента T.

Определение 2. *В игре Γ из начальной позиции $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ происходит поимка, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют момент $T(\varepsilon) > t_0$, позиционные стратегии управления с поводырем $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T(\varepsilon)]$ существуют момент $\tau \in [t_0, T(\varepsilon)]$ и номер $p \in I$ такие, что $z_p(\tau) \in M_p^\varepsilon$, где $M_p^\varepsilon = M_p + D_\varepsilon(0)$, $D_\varepsilon(a) = \{z \mid \|z - a\| < \varepsilon\}$.*

Определение 3. *Функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in R^1$ существует $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$ для которых справедливо неравенство*

$$\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Функция $f : [t_0, \infty) \to R^k$ называется рекуррентной на $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\omega} = A(t)\omega$, $\Phi(t_0) = E$.

Предположение 1. *Фундаментальная матрица Φ является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.*

Обозначим через $\mathrm{Int} A, \mathrm{co} A$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества A.

Предположение 2. $0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n\}$.

3. Поимка убегающего в классе квазистратегий

Определим функции

$$\lambda(v, h_i) = \begin{cases} \sup\{\lambda : \ \lambda \geqslant 0, \ -\lambda(h_i - M_i) \cap (V - v) \neq \varnothing\}, & \text{если } h_i \notin M_i, \\ 0, & \text{если } h_i \in M_i, \end{cases}$$

$$F_i(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s) z_i^0)\, ds.$$

Лемма 1. [9] *Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда существует $T > t_0$ такое, что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ существует $\alpha \in I$ такое, что* $F_\alpha(T) \geqslant 1$.

Обозначим $T_0 = \inf\{t \geqslant t_0 \mid \inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_i F_i(t) \geqslant 1\}$. В силу леммы 1 $T_0 < \infty$.

Теорема 1. [9] *Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда в игре $\tilde{\Gamma}$ происходит поимка в классе квазистратегий.*

4. Поимка убегающего в классе позиционных стратегий с поводырем

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1, 2. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка в классе позиционных стратегий с поводырем.*

Доказательство. Пусть $C = \max\limits_{i, m_i \in M_i} \|m_i\|$, ε —произвольное положительное число. В силу предположения 1 существует $T(\varepsilon) > T_0$, для которого выполнено $\|\Phi(T(\varepsilon)) - E\| < \frac{\varepsilon}{2(C+1)}$. Пусть $\Delta = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_r = T(\varepsilon)\}$ — разбиение отрезка $[t_0, T(\varepsilon)]$. Рассмотрим игру $\tilde{\Gamma}$, описываемую (2). Выберем $w_i^0 = z_i^0$ для всех $i \in I$.

1. Рассмотрим отрезок $[\tau_0, \tau_1]$. Задаем постоянное управление $\tilde{v}$ убегающего $\tilde{E}$ в игре $\tilde{\Gamma}$ произвольным образом. Если $F_i(t) < 1$, то $\tilde{u}_i(t) \in V$, $m_i(t) \in M_i$ в игре $\tilde{\Gamma}$ выбираем как лексикографический минимум среди решений уравнения

$$\tilde{u}_i(t) = \tilde{v}(t) - \lambda(\Phi(t)z_i^0, \tilde{v}(t))\Phi(t)(z_i^0 - m_i(t)).$$

Если $\tau_0^i \leqslant \tau_1$ первый момент времени для которого $F_i(\tau_0^i) = 1$, то полагаем $\tilde{u}_i(t) = \tilde{v}(t)$ для всех $t \geqslant \tau_0^i$. Управление u_i преследователей $P_i, i \in I$ в игре Γ на $[\tau_0, \tau_1)$ выбираем произвольным образом и постоянным.

2. Рассмотрим отрезок $[\tau_1, \tau_2]$. Пусть $s_i(\tau_1) = z_i(\tau_1) - w_i(\tau_1)$. Выбираем постоянное управление $\tilde{v}$ убегающего $\tilde{E}$ в игре $\tilde{\Gamma}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\Big(\sum_{i \in I} s_i(\tau_1), \tilde{v}\Big) = \min_{v \in V}\Big(\sum_{i \in I} s_i(\tau_1), v\Big).$$

Если $F_i(t) < 1$, то $\tilde{u}_i(t) \in V$, $m_i(t) \in M_i$ в игре $\tilde{\Gamma}$ выбираем как лексикографический минимум среди решений уравнения

$$\tilde{u}_i(t) = \tilde{v}(t) - \lambda(\Phi(t)z_i^0, \tilde{v}(t))\Phi(t)(z_i^0 - m_i(t)).$$

Если $\tau_1^i \leqslant \tau_2$ первый момент времени для которого $F_i(\tau_1^i) = 1$, то полагаем $\tilde{u}_i(t) = \tilde{v}(t)$ для всех $t \geqslant \tau_1^i$. Управления u_i^1 преследователей $P_i, i \in I$ в игре Γ выбираем постоянными на $[\tau_1, \tau_2]$ так, чтобы выполнялись равенства $(s_i(\tau_1), u_i^1) = \min\limits_{u_i \in V}(s_i(\tau_1), u_i)$.

3. Рассмотрим далее отрезок $[\tau_l, \tau_{l+1}]$ Пусть $s_i(\tau_l) = z_i(\tau_l) - w_i(\tau_l)$. Выбираем постоянное управление $\tilde{v}$ убегающего $\tilde{E}$ в игре $\tilde{\Gamma}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\Big(\sum_{i \in I} s_i(\tau_l), \tilde{v}\Big) = \min_{v \in V}\Big(\sum_{i \in I} s_i(\tau_l), v\Big).$$

Если $F_i(t) < 1$, то $\tilde{u}_i(t) \in V$, $m_i(t) \in M_i$ в игре $\tilde{\Gamma}$ выбираем как лексикографический минимум среди решений уравнения

$$\tilde{u}_i(t) = \tilde{v}(t) - \lambda(\Phi(t)z_i^0, \tilde{v}(t))\Phi(t)(z_i^0 - m_i(t)).$$

Если $\tau_l^i \leqslant \tau_{l+1}$ первый момент времени для которого $F_i(\tau_l^i) = 1$, то полагаем $\tilde{u}_i(t) = \tilde{v}(t)$ для всех $t \geqslant \tau_l^i$. Управления u_i^l преследователей $P_i, i \in I$ в игре Γ выбираем постоянными на $[\tau_l, \tau_{l+1}]$ так, чтобы выполнялись равенства $(s_i(\tau_l), u_i^l) = \min\limits_{u_i \in V}(s_i(\tau_l), u_i)$.

Таким образом, преследователи $P_i, i \in I$ в системе (1) строят свои управления пошагово, зная на каждом шаге реальную позицию игры и позицию во вспомогательной системе-поводыре (2).

Обозначим $M = \max\limits_{t\in[t_0,T(\varepsilon)]} \|A(t)\|$, $\delta = \max\limits_{l}(\tau_{l+1} - \tau_l)$, $s_i(t) = z_i(t) - w_i(t)$. Пусть $t \in [\tau_l, \tau_{l+1}]$. Тогда для произвольной функции $v(\cdot)$ и любого $t \in [\tau_l, \tau_{l+1}]$ справедливы неравенства

$$\sum_{i\in I}\Big(s_i(\tau_l), u_i^l - \tilde{u}_i(t)\Big)\leqslant 0, \quad \Big(\sum_{i\in I} s_i(\tau_l), \tilde{v} - v(t)\Big)\leqslant 0.$$

Поэтому для всех $t \in [t_0, T(\varepsilon)]$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i\in I}\|s_i(t)\|^2\Big)\leqslant 2M\sum_{i\in I}\|s_i(t)\|^2 + C\delta.$$

Так как $\sum\limits_{i\in I}\|s_i(t_0)\|^2 = 0$, то для всех $t \in [0, T(\varepsilon)]$ имеет место неравенство

$$\sum_{i\in I}\|s_i(t)\|^2 \leqslant C\delta(T(\varepsilon) - t_0)e^{2M(T(\varepsilon)-t_0)}.$$

Выбрав $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $C\delta(T(\varepsilon) - t_0)e^{2M(T(\varepsilon)-t_0)} < \frac{\varepsilon^2}{4}$, получаем $\sum\limits_{i\in I}\|s_i(T(\varepsilon))\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Следовательно, $\|s_i(T(\varepsilon))\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех i. Так как [9] $w_p(T(\varepsilon)) \in M_p^{\frac{\varepsilon}{2}}$ при некотором p, то $z_p(T(\varepsilon)) \in M_p^{\varepsilon}$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки(проект 1.5211.2017/8.9) и РФФИ (проект № 18-51-41005 Узб_т).

Список литературы

1. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 384 с.
2. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
3. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
4. Alias I.A., Ibragimov G.I., Rakmanov A. Evasion Differential Games of Infinitely Many Evaders from Infinitely Many Pursuers in Hilbert Space // Dyn. Games Appl. 2016. Vol. 6, No. 2. P. 1-13.
5. Kumkov S.S., Menec S.L., Patsko V.S. Zero-Sum Pursuit-Evasion Differential Games with Many Objects: Survey of Publications // Dyn. Games App. 2017. No. 7. P. 609-633.
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981. 288 с.
7. Банников А.С. О задаче позиционной поимки одного убегающего группой преследователей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 1. С. 3-7.
8. Шишкина Н.Б. О задаче преследования по позиции в дифференциальной игре со многими преследователями // Кибернетика. 1987. № 1. С. 47-50.
9. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. К задаче группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тем. обз. 2017. Т. 132. С. 81-85.