УДК 519.833

КООПЕРАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ИГРАХ

А.Н. Реттиева

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Россия, 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

E-mail: annaret@krc.karelia.ru

Ключевые слова: динамические игры, многокритериальные игры, кооперативное равновесие, характеристическая функция, арбитражная схема Нэша.

Аннотация: Предложены концепции определения оптимального поведения в многокритериальных динамических играх. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша), а для определения кооперативного – арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Исследован процесс формирования коалиций в многокритериальных динамических играх. Для построения характеристической функции используется арбитражная схема Нэша, где многокритериальное равновесие по Нэшу используется в качестве точек статус-кво. Предложено два варианта построения характеристической функции, учитывающие степень информированности игроков (модели с отсутствием информации и с информацией). Исследована динамическая многокритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса при кооперативном и некооперативном поведении, а также для различных концепций построения характеристической функции.

1. Введение

Математические модели, учитывающие наличие нескольких целевых функций у участников конфликтно-управляемых процессов, более приближены к реальности. Зачастую игроки хотят достичь одновременно нескольких целей, которые могут быть несравнимы. Такие ситуации типичны для теоретико-игровых моделей в экономике и экологии.

Все предложенные ранее концепции решений многокритериальных игр используются только в статическом варианте. Мало исследованной проблемой является построение равновесий в динамических многокритериальных играх. В работе [3] было формализовано понятие многокритериального некооперативного равновесия, а в работе [4] – многокритериального некооперативного равновесия.

В данной работе предложенные подходы используются для построения кооперативных стратегий и выигрышей при формировании произвольной коалиции $S \subset N$. При этом исследованы два варианта построения характеристической функции, учитывающие степень информированности игроков (модели с отсутствием информации и с информацией). В первом случае игроки вне коалиции используют свои стратегии

Нэша, определенные для некооперативного варианта игры (модель с отсутствием информации) [1], а во втором – игроки вне коалиции строят новые стратегии Нэша в игре с $N \backslash S$ игроками (модель с информацией).

Для иллюстрации предложенных концепций решений исследована динамическая многокритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами с конечным горизонтом планирования. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса при кооперативном и некооперативном поведении, а также для различных концепций построения характеристической функции.

2. Динамические многокритериальные игры

Рассмотрим динамическую многокритериальную игру с n игроками в дискретном времени с конечным горизонтом планирования. Игроки эксплуатируют некоторый общий возобновляемый ресурс и стремятся достигнуть двух различных целей. Динамика развития ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, \ldots, u_{nt}), \;\; x_0 = x, \tag{1}$$

где $x_t \geqslant 0$ – размер ресурса в момент времени $t \geqslant 0$, $f(x_t, u_{1t}, \ldots, u_{nt})$ – функция развития возобновляемого ресурса, $u_{it} \in U_i$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i в момент времени $t \geqslant 0$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$.

Обозначим профиль стратегий $u_t = (u_{1t}, \ldots, u_{nt})$. Вектор-функции выигрышей игроков на конечном промежутке планирования $[0, m]$ имеют вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_1^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^1(u_t) \\ J_1^2 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^2(u_t) \end{pmatrix}, \ldots, \; J_n = \begin{pmatrix} J_n^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_n^1(u_t) \\ J_n^2 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_n^2(u_t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $g_i^j(u_t) \geqslant 0$ – функции «мгновенного» выигрыша, $j = 1, 2$, $i \in N$, $\delta \in (0, 1)$ – общий коэффициент дисконтирования.

2.1. Многокритериальное равновесие по Нэшу

Для построения некооперативного равновесия в многокритериальной динамической игре используется подход, предложенный в [3]. А именно, применяется конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша). Поэтому, сначала определяются гарантированные выигрыши, которые играют роль точек статус-кво. В работе [3] были предложены три варианта построения гарантированных выигрышей и показано, что наилучшим для состояния эксплуатируемой системы и выгодным для участников является такой, где гарантированные выигрыши строятся как равновесия по Нэшу. Поэтому в данной модели с n игроками ограничимся именно этим способом определения гарантированных точек:

$G_1^1, \ldots, G_n^1$ – это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре $\langle N, \{U_i\}_{i=1}^n, \{J_i^1\}_{i=1}^n \rangle$,
$G_1^2, \ldots, G_n^2$ – это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре $\langle N, \{U_i\}_{i=1}^n, \{J_i^2\}_{i=1}^n \rangle$.

Для построения выигрышей игроков в динамической многокритериальной игре используем произведения Нэша, при этом гарантированные выигрыши играют роль точек статус-кво:

$$H_1(u_t) = (J_1^1(u_t) - G_1^1)(J_1^2(u_t) - G_1^2)\,,$$

$$\ldots$$

$$H_n(u_t) = (J_n^1(u_t) - G_n^1)(J_n^2(u_t) - G_n^2)\,.$$

Определение 1. *Профиль стратегий* $u_t^N = (u_{1t}^N, \ldots, u_{nt}^N)$ *является многокритериальным равновесием по Нэшу в игре (1), (2), если*

$$H_i(u_t^N) \geqslant H_1(u_{1t}^N, \ldots, u_{i-1\,t}^N, u_{it}, u_{i+1\,t}^N, \ldots, u_{nt}^N)\ \ \forall u_{it} \in U_i\,,\ i \in N\,. \tag{3}$$

2.2. Многокритериальное кооперативное равновесие

Теперь предположим, что игроки хотят действовать кооперативно, т.е. формируется гранд коалиция. Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. При этом в качестве точки статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий.

Некооперативные выигрыши в соответствии с определением 1 примут вид

$$J_1^N = \begin{pmatrix} J_1^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^1(u_t^N) \\ J_1^{2N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^2(u_t^N) \end{pmatrix}, \ldots\ J_n^N = \begin{pmatrix} J_n^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_n^1(u_t^N) \\ J_n^{2N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_n^2(u_t^N) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша, следовательно, необходимо решить следующую задачу:

$$(\sum_{i=1}^{n} V_i^{1c} - \sum_{i=1}^{n} J_i^{1N})(\sum_{i=1}^{n} V_i^{2c} - \sum_{i=1}^{n} J_i^{2N}) =$$

$$= (\sum_{t=0}^{m} \delta^t (g_1^1(u_t^c) + \ldots + g_n^1(u_t^c)) - J_1^{1N} - \ldots - J_n^{1N}) \cdot$$

$$\cdot (\sum_{t=0}^{m} \delta^t (g_1^2(u_t^c) + \ldots + g_n^2(u_t^c)) - J_1^{2N} - \ldots - J_n^{2N}) \to \max_{u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c}\,, \tag{5}$$

где J_i^{jN} — некооперативные выигрыши, определенные в (4), $j = 1, 2$, $i \in N$.

Определение 2. *Профиль стратегий* $u_t^c = (u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c)$ *является многокритериальным кооперативным равновесием в игре (1), (2), если является решением задачи (5).*

2.3. Формирование коалиции

Теперь предположим, что часть игроков объединяется в коалицию S. Для определения выигрыша коалиции также будем использовать арбитражную схему Нэша для всего периода продолжения игры. Исследуем два варианта, учитывающие наличие информации у игроков о формировании коалиции (модели с отсутствием информации и с информацией). В первом случае игроки вне коалиции используют свои стратегии Нэша, определенные для некооперативного варианта игры (модель с отсутствием информации) [?], а во втором – игроки вне коалиции строят новые стратегии Нэша в игре с $N \backslash S$ игроками (модель с информацией).

Модель с отсутствием информации. В данном случае игроки, образовавшие коалицию S, не сообщают об этом другим участникам. Поэтому агенты, не входящие в коалицию, продолжают использовать стратегии Нэша, определенные для некооперативного варианта многокритериальной динамической игры.

Для определения общего кооперативного выигрыша коалиции S решается следующая задача:

$$(\sum_{i\in S} V_i^{1S}(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{1N})(\sum_{i\in S} V_i^{2c}(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{2N}) =$$

$$= (\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in S} g_i^1(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{1N})(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in S} g_i^2(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{2N}) \to \max_{u_{it},\, i\in S}, \tag{6}$$

где

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} u_i, \ i \in S\,, \\ u_i^N, \ i \in N\backslash S\,. \end{cases}$$

Модель с информацией. В данном случае игроки, не входящие в коалицию S, получают информацию о ее формировании. Поэтому они определяют свои новые стратегии как многокритериальное равновесие по Нэшу в игре с $N\backslash S$ игроками.

Для определения общего кооперативного выигрыша коалиции S решается следующая задача:

$$(\sum_{i\in S} V_i^{1S}(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{1N})(\sum_{i\in S} V_i^{2c}(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{2N}) =$$

$$= (\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in S} g_i^1(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{1N})(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in S} g_i^2(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{2N}) \to \max_{u_{it},\, i\in S}, \tag{7}$$

где

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} u_i, \ i \in S\,, \\ \tilde{u}_i^N, \ i \in N\backslash S\,, \end{cases}$$

а стратегии $\tilde{u}_i^N$ индивидуальных игроков определяются из решения задач

$$H_i = (J_i^1(u_t) - G_i^1)(J_i^2(u_t) - G_i^2) \longrightarrow \max_{u_i,\, i\in N\backslash S}, i \in N\backslash S\,.$$

2.4. Характеристическая функция

Таким образом характеристическая функция для игры (1), (2), начинающейся в момент t из состояния x_t имеет вид

$$V(L, x_t) = \begin{cases} 0, & L = 0\,, \\ V(\{i\}, x_t) = \begin{pmatrix} J_i^{1N}(u_t^N) \\ J_i^{2N}(u_t^N) \end{pmatrix}, & L = \{i\}\,, \\ V(S, x_t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i\in S} V_i^{1S}(u_t^s) \\ \sum\limits_{i\in S} V_i^{2S}(u_t^s) \end{pmatrix}, & L = S\,, \\ V(I, x_t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} V_i^{1c}(u_t^c) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} V_i^{2c}(u_t^c) \end{pmatrix}, & L = I\,, \end{cases} \tag{8}$$

где $J_i^{jN}(u_t^N)$ определены в (4), $i \in N$, $j = 1, 2$, $V_i^{jS}(u_t^s)$ определяются из решения задач (6) или (7), $i \in S$, $j = 1, 2$, а $V_i^{jc}(u_t^c)$ определяются из решения задачи (5), $i \in N$, $j = 1, 2$.

Для иллюстрации предложенных концепций решений исследована динамическая многокритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами с конечным горизонтом планирования. Построены некооперативное и кооперативное равновесия. Определены стратегии и выигрыши участников при формировании коалиции в двух вариантах. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса при кооперативном и некооперативном поведении, а также для различных концепций построения характеристической функции.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №17-11-01079).

Список литературы

1. Petrosjan L.A., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // J. of Econ. Dyn and Contr. 2003. Vol. 27, No. 3. P. 381-398.
2. Pieri G., Pusillo L. Multicriteria Partial Cooperative Games // App. Math. 2015. Vol. 6, No. 12. P. 2125-2131.
3. Rettieva A.N. Equilibria in dynamic multicriteria games // Int. Game Theory Rev. 2017. Vol. 19, No. 1. P. 1750002.
4. Rettieva A.N. Dynamic multicriteria games with finite horizon // Mathematics. 2018. Vol. 6, No. 9. P. 156.
5. Shapley L.S. Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Res. Log. Quart. 1959. Vol. 6. P. 57-61.