

УДК 519.83

РАВНОВЕСИЕ ДИСКРЕТНОГО ОТКЛИКА В ЗАШУМЛЕННЫХ ИГРАХ С БИНАРНЫМ ВЫБОРОМ НА ГРАФАХ

А.В. Леонидов

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
Россия, 119991, Москва, Ленинский проспект 53
E-mail: leonidov@lpi.ru

А.В. Савватеев

Кавказский Математический Центр при Адыгейском ГУ
Россия, 385000, Майкоп, Первомайская улица, 208
E-mail: hibiny@mail.ru

А.Г. Семенов

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
Россия, 119991, Москва, Ленинский проспект 53
E-mail: semenov@lpi.ru

Ключевые слова: Равновесие дискретного отклика, игры с бинарным выбором, игры на графах, эволюционные игры.

Аннотация: Рассматриваются статическое и динамическое равновесия дискретного отклика (РДО) в зашумленных играх с дискретным выбором на графах.

1. Введение

В докладе рассматривается статическое и динамическое равновесия дискретного отклика (Quantal Response Equilibrium) [1] в задачах с бинарным выбором на графах. Полученные результаты обобщают результаты работы [2] по двум направлениям. Во-первых, показано, что статическое равновесие на полном графе, рассмотренное в [2], является равновесием дискретного отклика. Во-вторых, дан вывод уравнений для статического и динамического равновесий дискретного отклика в задаче с бинарным выбором на графах с произвольной топологией.

2. Статическое равновесие дискретного отклика на графах

2.1. Общие соотношения

Рассмотрим статическое равновесие дискретного отклика в игре N агентов с бинарным выбором $s_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, N$ на графе \mathcal{G} с матрицей смежности g_{ij} . Ожидаемая полезность от выбора s_i для i -го агента предполагается равной

$$(1) \quad \langle U_i(s_i) \rangle = \left[H_i + \sum_{j \neq i} g_{ij} J_{ij} \langle s_j \rangle_{(i)} \right] s_i + \epsilon_{s_i},$$

где H_i параметризует идиосинкратическую склонность к выбору $s_i = \text{sign}(H_i)$, J_{ij} - матрица констант взаимодействия, $\langle s_j \rangle_{(i)}$ - оценка агентом i ожидаемого выбора агента j и ϵ_{s_i} - случайные величины с нулевым средним, характеризующиеся для каждого агента *одинаковыми* дифференциальными распределениями $\phi^{(i)}(\epsilon_{s_i})$. Из уравнения (1) следует, что вероятность p_{s_i} выбора стратегии s_i агентом i равна

$$(2) \quad p_{s_i} = F_{<}^{(i)} \left(\left[2H_i + 2 \sum_j g_{ij} J_{ij} \langle s_j \rangle_{(i)} \right] s_i \right),$$

где $F_{<}^{(i)}(z)$ - функция распределения для разности $\epsilon_{-s_i} - \epsilon_{s_i}$ для агента i . В частности, вероятность p_i^+ выбора $s_i = 1$ равна тем самым

$$(3) \quad p_i^+ = F_{<}^{(i)} \left(2H_i + 2 \sum_j g_{ij} J_{ij} \langle s_j \rangle_{(i)} \right),$$

где, соответственно, $F_{<}^{(i)}(z)$ - функция распределения для агента i разности $\epsilon_- - \epsilon_+$

$$(4) \quad F_{<}^{(i)} = \int^z dz_1 f^{(i)}(z_1), \quad f^{(i)}(z_1) = \int dz_2 \phi^{(i)}(z_2) \phi^{(i)}(z_2 + z_1)$$

Равновесию дискретного отклика (p_1^+, \dots, p_N^+) отвечает согласованность смешанных стратегий игроков и их ожиданий относительно смешанных стратегий их соседей по графу, т.е. выполнение для $\forall j, i$ равенства

$$(5) \quad \langle s_j \rangle_{(i)} = 2p_j^+ - 1,$$

и, соответственно, уравнениям для равновесных вероятностей p_i^+ равновесия дискретного отклика

$$(6) \quad p_i^+ = F_{<}^{(i)} \left(2H_i + 2 \sum_j g_{ij} J_{ij} (2p_j^+ - 1) \right), \quad \forall i$$

Удобно переписать уравнения (6) как уравнения на равновесные средние $m_i = 2p_i^+ - 1$:

$$(7) \quad m_i = 2F_{<}^{(i)} \left(2H_i + 2 \sum_j g_{ij} J_{ij} m_j \right) - 1$$

2.2. РДО на полном графе

Рассмотрим случай полного графа в простейших предположениях $J_{ij} = J/N$, $H_i = H$ и $F_{<}^{(i)}(z) = F_{<}(z)$ для всех i, j . В этом случае равновесие для всех агентов одинаково, $m_i = m \forall i$, так что равновесие дискретного отклика полностью характеризуется уравнением

$$(8) \quad m = 2F_{<}[2H + 2Jm] - 1,$$

т.е. в точности обобщенное уравнение Кюри-Вайса, полученное в работе [2]. Тем самым доказано, что изучавшиеся ранее равновесия в задаче с зашумленным бинарным выбором на полном графе являются равновесиями дискретного отклика.

Отметим также, что в случае $H = 0$ в задаче имеется универсальная перестройка пространства решений (8) в точке $4Jf(0) = 1$, так что при $4Jf(0) < 1$ имеется только решение $m = 0$, а при $4Jf(0) > 1$ появляются пара дополнительных решений $\pm m \neq 0$.

2.3. РДО на графе в замороженном (annealed) приближении

Рассмотрим равновесие дискретного отклика в рассматриваемой задаче (7) на графе с произвольной топологией в замороженном (annealed) приближении, см., напр., обзор [3]. В этом приближении матричные элементы матрицы смежности g_{ij} заменяются на вероятности формирования ребра между узлами i, j со степенями k_i, k_j в конфигурационной модели:

$$(9) \quad g_{ij} \simeq \frac{k_i k_j}{N \langle k \rangle}$$

В этом приближении систему уравнений (7) можно переписать в виде

$$(10) \quad m_{k_i} = 2F_{<} \left[2H + 2Jk_i \sum_k \frac{k p_k}{\langle k \rangle} m_k \right] - 1,$$

где $\{p_k\}$ - распределение по вероятностям степеней вершин графа и

$$(11) \quad m_k = \langle \sigma_j \rangle |_{k_j=k} \equiv 2p_k^+ - 1$$

Систему уравнений (11) удобно переписать в виде уравнения на взвешенное среднее

$$(12) \quad m_w = \sum_k \frac{k p_k}{\langle k \rangle} m_k,$$

так что соответствующее обобщенное уравнение Кюри-Вайса для m_w имеет вид

$$(13) \quad m_w = \sum_k \frac{k p_k}{\langle k \rangle} 2F_{<}[2H + 2Jk m_w] - 1$$

Отметим, что при $H = 0$ в рассматриваемом приближении перестройка решений для m_w имеет место в точке

$$(14) \quad 4J \langle k^2 \rangle f(0) = \langle k \rangle$$

3. Динамическое равновесие дискретного отклика на графах

Состояние системы полностью характеризуется функцией распределения

$$(15) \quad P(\{s\}(t)) = P[s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)],$$

характеризующий вероятность обнаружения системы в состоянии $\{s\}(t)$ в момент времени t . Отметим, что в предположении о независимости решений, принимаемых агентами, функция распределения факторизуется:

$$(16) \quad P(\{s\}(t)) = P[s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)] = \prod_{i=1}^N p(s_i(t))$$

Драйвером эволюции системы во времени являются переходы $s_i(t) \rightarrow -s_i(t)$, которые предполагаем происходящими с вероятностью в единицу времени $w(s_i \rightarrow -s_i)$. Соответствующее уравнение эволюции (мастер-уравнение) имеет вид:

$$(17) \quad \frac{dP(\{s\}(t))}{dt} = \sum_i [w(-s_i \rightarrow s_i)P(s_1, \dots, -s_i, \dots, s_N) - w(s_i \rightarrow -s_i)P(s_1, \dots, s_i, \dots, s_N)]$$

Из уравнения (17) следуют уравнения для эволюции средних в узлах $m_i(t) = \langle s_i \rangle_{P(\{s\}(t))}$

$$(18) \quad \frac{dm_i(t)}{dt} = -2\langle s_i(t)w(s_i \rightarrow -s_i) \rangle_{P(\{s\}(t))}$$

Вероятность перехода в единицу времени $w(s_i \rightarrow -s_i)$ естественно выбрать в следующем виде [2]

$$(19) \quad w(s_i \rightarrow -s_i) = \lambda p_{-s_i} = \lambda F_{<}^{(i)} \left(- \left[2H_i + 2 \sum_j g_{ij} J_{ij} s_j(t) \right] s_i(t) \right),$$

где вероятность p_{-s_i} определена в (2). Для вывода уравнений эволюции для $m_i(t)$ удобно воспользоваться тождеством

$$(20) \quad p_{-s_i} = \frac{1}{2} [1 - s_i(s_i p_{s_i} - s_i p_{-s_i})] \equiv \frac{1}{2} [1 - s_i \langle s_i \rangle]$$

Тогда из уравнений ((18),(19),(20)) следует, что

$$(21) \quad \frac{dm_i(t)}{dt} = -\lambda \left\{ m_i(t) - \left(2F_{<}^{(i)} \left[2H_i + 2 \sum_j g_{ij} J_{ij} m_j(t) \right] - 1 \right) \right\}$$

и, тем самым, при выборе (19) равновесие дискретного отклика (7) является стационарной точкой рассматриваемой эволюционной динамики.

Список литературы

1. McKelvey R.D., Palfrey, T. R. Quantal response equilibria for normal form games // Games and economic behavior. 1995. Vol. 10, No. 1. P. 6.
2. Blume L., Durlauf S. Equilibrium Concepts for Social Interaction Models // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5, No. 3. P. 193.
3. Dorogovtsev S.N., Goltsev A.V., Mendes J.F.F, Critical phenomena in complex networks //Reviews of Modern Physics. 2008. Vol. 80, No. 4. P. 1275.