УДК 517.977

ОДНОТИПНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ СО СМЕШАННОЙ ПЛАТОЙ И НЕВЫПУКЛЫМ ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ

В.И. Ухоботов

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

E-mail: ukh@csu.ru

И.В. Изместьев

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

E-mail: j748e8@gmail.com

Ключевые слова: управление, дифференциальная игра, плата, терминальное множество.

Аннотация: В конечномерном нормированном пространстве рассматривается однотипная дифференциальная игра. Вектограммы игроков описываются одним и тем же шаром с разными радиусами, зависящими от времени. Движение строится с помощью ломаных. В одной из рассматриваемых задач цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени привести фазовый вектор на терминальное множество. Цель второго игрока противоположна. В другой задаче первый игрок минимизирует плату, которая зависит от модуля линейной функции от фазового вектора в заданный момент времени и интеграла от степени нормы управления на фиксированном отрезке времени.

1. Введение

Линейные дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания с помощью линейной замены переменных [1, С. 160] можно привести к виду, когда в правой части новых уравнений стоит только сумма управлений первого и второго игроков, значения которых принадлежат заданным множествам, зависящим от времени. К таким играм сводится произвольная линейная дифференциальная игра, в которой платой является модуль линейной функции.

В дифференциальной игре «изотропные ракеты» [2, С. 139], в ее варианте при отсутствии трения «мальчике и крокодиле» [3] и в контрольном примере Л.С. Понтрягина [3] множества значений управлений являются шарами, радиусы которых зависят от времени. Для таких игр в случае, если терминальное множество является шаром заданного радиуса, в [3] построен альтернированный интеграл. В работе [4] построены оптимальные позиционные стратегии игроков. В работах [5–7] рассмотрена однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца. Построены оптимальные управления игроков.

Эти результаты используются в данной работе при построении управлений игроков в однотипных играх со смешанной платой и терминальным множеством в форме кольца.

2. Линейная дифференциальная игра с одномерной целью

Рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot{x} = A(t)x - \xi + \eta + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \leqslant p. \tag{1}$$

Здесь управление первого игрока $\xi \in W \subset \mathbb{R}^n$, управление второго игрока $\eta \in F \subset \mathbb{R}^n$, где W и F — связные компакты; $A(t)$ — непрерывная матрица; $f : (-\infty, p] \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция.

Заданы вектор $\psi \in \mathbb{R}^n$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \varepsilon$. Цель первого игрока заключается в осуществлении неравенства

$$|\langle \psi, x(p) \rangle - \alpha| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Цель второго игрока противоположна.

Обозначим через $\psi(t)$ решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t), \quad \psi(p) = \psi; \quad t \leqslant p.$$

Здесь A^* — транспонированная матрица.

Положим

$$a_-(t) = \min_{\xi} \langle \psi(t), \xi \rangle, \quad a_+(t) = \max_{\xi} \langle \psi(t), \xi \rangle, \quad \xi \in W;$$
$$b_-(t) = \min_{\eta} \langle \psi(t), \eta \rangle, \quad b_+(t) = \max_{\eta} \langle \psi(t), \eta \rangle, \quad \eta \in F.$$

Отметим, что эти функции являются непрерывными [8, С. 84, лемма II.3.5].

Тогда из связности компактов W и F следует [9, С. 333–334, теорема 4]

$$\langle \psi(t), \xi \rangle = \frac{a_+(t) + a_-(t)}{2} + a(t)u, \quad |u| \leqslant 1, \quad a(t) = \frac{a_+(t) - a_-(t)}{2} \geqslant 0;$$
$$\langle \psi(t), \eta \rangle = \frac{b_+(t) + b_-(t)}{2} + b(t)v, \quad |v| \leqslant 1, \quad b(t) = \frac{b_+(t) - b_-(t)}{2} \geqslant 0.$$

Перейдем к новой одномерной переменной

$$z = \langle \psi(t), x \rangle + \frac{1}{2} \int_t^p (b_+(r) + b_-(r) - a_+(r) - a_-(r))dr + \int_t^p \langle \psi(r), f(r) \rangle dr - \alpha.$$

Продифференцируем z:

$$\dot{z} = \langle -A^*(t)\psi(t), x \rangle + \langle \psi(t), A(t)x - \omega + \eta + f(t) \rangle +$$
$$+ \frac{1}{2}(a_+(t) + a_-(t) - b_+(t) - b_-(t)) - \langle \psi(t), f(t) \rangle.$$

Учитывая равенство $\langle \psi(t), A(t)x \rangle = \langle A^*(t)\psi(t), x \rangle$, задача (1), (2) может быть записана следующим образом

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1; \quad |z(p)| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

3. Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме шара

Рассмотрим задачу (3) в общем случае, когда z, u, v принадлежат пространству $\mathbb{R}^n$. Для такой игры Л.С. Понтрягин построил [3] альтернированный интеграл $W(t_0)$. Из его вида следует, что $z(t_0) \in W(t_0)$ тогда и только тогда, когда

$$f(t_0) = \max(f_1(t_0), f_2(t_0)) \leqslant \varepsilon, \tag{4}$$

где

$$f_1(t) = \|z(t)\| + \int_t^p (b(r) - a(r))dr, \quad f_2(t) = \max_{t \leqslant t \leqslant p} \int_t^p (b(r) - a(r))dr.$$

Обозначим

$$w(z) = \frac{z}{\|z\|} \text{ при } z \neq 0 \quad \text{и} \quad w(0) \text{ – любое с ограничением } \|w(0)\| = 1.$$

Теорема 1 ([10], теоремы 8.1 и 8.2)**.** *Для начального состояния $t_0 < p$, $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$ в игре (3) управление $u = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| \leqslant f(t_0)$ для любой функции $\|v(t,z)\| \leqslant 1$ для любого реализовавшегося движения $z(t)$. Управление $v = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| \geqslant f(t_0)$ для любой функции $\|u(t,z)\| \leqslant 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$.*

Из этой теоремы следует, что, если выполнено (4), то $u = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| \leqslant \varepsilon$ для любой функции $\|v(t,z)\| \leqslant 1$ для любого реализовавшегося движения $z(t)$. Если же неравенство (4) не выполнено, то управление $v = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| > \varepsilon$ для любой функции $\|u(t,z)\| \leqslant 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$.

4. Однотипная дифференциальная игра со смешанной платой

Рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot{z} = -\phi(t)a(t)u + b(t)v, \quad \phi(t) \geqslant 0, \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1 \tag{5}$$

с платой

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^p \phi^q(r)dr \to \min_u \max_v . \tag{6}$$

Предложение 1. *Функция $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является непрерывной, строго возрастает и $G(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$.*

Рассмотрим задачу

$$G(\varepsilon) + \int_{t_0}^p \phi^q(r)dr \to \min, \quad f(\phi(\cdot)) \leqslant \varepsilon, \ \varepsilon \geqslant 0, \quad \phi(\cdot) \in L_q[t_0, p], \ \phi(t) \geqslant 0. \tag{7}$$

Теорема 2 ([11])**.** *Решение в задаче (7) существует.*

Теорема 3 ([11]). *Пусть ε_* и $\phi_*(t)$ — решение задачи (7). Тогда оптимальными управлениями игроков в игре (5) и (6) являются $\phi_0(t) = \phi_*(t)$, $u_0 = v_0 = sign\ z$, где в качестве $sign\ 0$ можно брать 1 или -1.*

Теорема 4 ([11]). *Пусть ε^* и $\phi^*(t)$ удовлетворяют неравенствам (7). Пусть существуют число $\lambda \geqslant 0$ и неубывающая на отрезке $[t_0, p]$ функция $\theta(t)$ такие, что*

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & \theta(t_0) = 0; \quad G(\varepsilon^*) - G(\varepsilon) \leqslant (\lambda + \theta(p))(\varepsilon^* - \varepsilon) \text{ при любом } \varepsilon \geqslant 0;\\
& \lambda\left(\int_{t_0}^{p} \theta(r)(b(r) - \phi^*(r)a(r))dr + |z(t_0)| - \varepsilon^*\right) = 0;\\
& \int_{t_0}^{p} \theta(r)(b(r) - \phi^*(r)a(r))dr = \theta(p)\varepsilon^*; \quad \phi^*(t) = \left(\frac{a(t)}{q}(\lambda + \theta(t))\right)^{\frac{1}{q-1}}.
\end{aligned}
$$

Тогда ε^* и $\phi^*(t)$ являются решением задачи (7).

Теорема 5 ([11]). *Пусть функция $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ являются выпуклой. Тогда существует решение ε^*, $\phi^*(t)$ задачи (7), для которого найдутся число $\lambda \geqslant 0$ и неубывающая функция $\theta : [t_0, p] \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют условиям (8).*

5. Случай невыпуклого терминального множества

Пусть в дифференциальной игре (3) цель выбора управления u заключается в осуществлении неравенств

$$
(9)\qquad \varepsilon_1 \leqslant \|z(p)\| \leqslant \varepsilon_2,
$$

где $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$.

Обозначим

$$
g(t) = \int_t^p (a(r) - b(r))dr, \quad t \leqslant p.
$$

Положим $t(\varepsilon_1) = -\infty$, если $\varepsilon_1 > g(t)$ при всех $t \leqslant p$. Иначе

$$
t(\varepsilon_1) = \inf\{t \leqslant p : \varepsilon_1 > g(\tau) \text{ при всех } t < \tau \leqslant p\}.
$$

Обозначим

$$
f_2(t) = \varepsilon_2 + g(t) \text{ при } t \leqslant p; \quad f_1(t) = \begin{cases} \varepsilon_1 - g(t) & \text{при} \quad t(\varepsilon_1) \leqslant t \leqslant p,\\ 0 & \text{при} \quad t \leqslant t(\varepsilon_1). \end{cases}
$$

Положим $t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\infty$, если $f_1(t) \leqslant f_2(t)$ при всех $t \leqslant p$. Иначе

$$
t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \inf\{t \leqslant p : f_1(\tau) \leqslant f_2(\tau) \text{ при всех } t < \tau \leqslant p\}.
$$

В работе [5] для рассматриваемой задачи был построен альтернированный интеграл

$$
W(t) = \{z \in \mathbb{R}^n : f_1(t) \leqslant \|z\| \leqslant f_2(t)\} \text{ при } t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leqslant t \leqslant p,
$$

$$
W(t) = \varnothing \text{ при } t < t(\varepsilon_1, \varepsilon_2).
$$

Теорема 6 ([7]). *Пусть начальное состояние t_0, $z(t_0)$ таково, что $z(t_0) \in W(t_0)$. Тогда управление первого игрока $u(t,z) = w(z)$ при $t < t(\varepsilon_1)$ и*

$$u(t,z) = \operatorname{sign}\left(\|z\| - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right) w(z) \text{ при } t(\varepsilon_1) \leqslant t \leqslant p$$

при любом допустимом управлении второго игрока обеспечивает для любого реализовавшегося движения $z(t)$ выполнение неравенств (9).

Используя эту теорему для игры (5), (6) с дополнительным условием $0 < \alpha_1 \leqslant \|z(p)\| \leqslant \alpha_2$ получены оптимальные управления игроков. Здесь $0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2$ — заданные числа.

6. Заключение

В работе приведен обзор результатов авторов, касающихся однотипных дифференциальных игр. Показано, что произвольная линейная дифференциальная игра с одномерной целью может быть сведена к одномерной однотипной дифференциальной игре. Приведены условия оптимальности в однотипной дифференциальной игре с интегральным ограничением и смешанной платой. Рассмотрен случай невыпуклого терминального множества (кольца).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00264_а).

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Наука, 1967. 479 с.
3. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, № 9. С. 307-330.
4. Ухоботов В.И. Синтез управления в однотипных дифференциальных играх с фиксированным временем // Вестн. Челяб. ун-та (Математика. Механика). 1996. Вып. 1. С. 178-184.
5. Ухоботов В.И. Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца // Некоторые задачи динамики и управления: сб. науч. тр. под ред. В.Д. Батухтина.Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2005. С. 108-123.
6. Ухоботов В.И., Изместьев И.В. Однотипные дифференциальные игры с терминальным множеством в форме кольца // Труды Международной конференции «Динамика систем и процессы управления», посвящ. 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. Екатеринбург, 15-20 сентября 2014 г. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2015. С. 325-332.
7. Изместьев И.В., Ухоботов В.И. Об одном подходе к построению управления первого игрока в однотипной дифференциальной игре с терминальным множеством в форме кольца // Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 2, Вып. 1. С. 80-87.
8. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
9. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1981. 687 с.
10. Ухоботов В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учебное пособие. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2005. 124 с.
11. Ухоботов В.И. Об одной линейной задаче управления при наличии помехи // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2017. Т. 8, № 2. С. 36-46.