УДК 517.9

ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕСУРСОВ ПО УРОВНЯМ ЭФФЕКТИВНОСТИ

А.М. Сазонов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН

Россия, 185001, Петрозаводск, Пушкинская ул., 11

E-mail: sazonov@cs.karelia.ru

А.Н. Кириллов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН

Россия, 185001, Петрозаводск, Пушкинская ул., 11

E-mail: krllv1812@yandex.ru

Ключевые слова: задачи управления, динамические системы, шумпетеровская динамика.

Аннотация: В докладе поставлена задача управления для модели оптимального инвестирования в основные производственные фонды предприятия с шумпетеровской динамикой. Для решения задачи применяется принцип максимума Понтрягина. Исследованы необходимые условия существования оптимального управления.

1. Введение

В 1939 году Й. Шумпетер предложил концепцию эндогенного экономического роста, в основе которого лежат два процесса: создание новых технологий – инновации и их заимствование – имитации. Математическая формализация теории эндогенного экономического роста была предложена в работах В. М. Полтеровича, Г. М. Хенкина, А. А. Шананина [2, 4–6].

В статье А. А. Шананина и Г. М. Хенкина [6] была описана модель динамики мощностей следующего вида

$$\dot{M}_i = (1-\varphi_i)\lambda_i M_i + \varphi_{i-1}\lambda_{i-1}M_{i-1}, i = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями

$$M_0(t) \equiv 0, M_i(0) \geqslant 0, \sum_{i=1}^{N} M_i(0) > 0, M_i(0) = 0 \text{ при } i > N. \tag{2}$$

Здесь $M_i(t)$ – объем мощностей предприятий на уровне i, φ_i – доля средств, которую предприятия на уровне i тратят на развитие производства на уровне $i+1$, λ_i –

удельная прибыль, получаемая на уровне i (прибыль от единицы товара в единицу времени), $i = 1,..,N$. При этом, $\varphi_i(t) = \alpha + \beta(1 - \frac{\sum\limits_{k=0}^{i} M_k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} M_k})$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – константы, обозначающие интенсивность инноваций и имитаций, соответственно.

В работе [6] был получен вид предельного распределения мощностей.

В работе С. М. Асеева и А. В. Кряжимского [1] была предожена модель оптимального инвестирования в основные производственные фонды предприятия вида

$$\dot{x} = u - \delta x, u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^1, 0 \leqslant u \leqslant u_{max}\}, \tag{3}$$

$$x(0) = x_0, \tag{4}$$

$$J(x,u) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t}[ax(t) - bx^2(t) - cu(t)]dt \to max, \tag{5}$$

где $x(t)$ – основные производственные фонды предприятия (капитал), управление $u(t)$ – количество единиц оборудования, приобретаемого в единицу времени, следующую за моментом времени t (инвестиционная политика предприятия) со следующими параметрами: $\delta > 0$ – удельная скорость износа оборудования, $a = \overline{\pi} - \zeta > 0$, где $\overline{\pi} > 0$ – максимальная цена, по которой товар может быть продан на рынке, $\zeta > 0$ – стоимость производства единицы продукта, $c > 0$ – стоимость единицы капитала, $x_0 > 0$ – начальное состояние, $u_{max} > 0$ характеризует максимально возможную скорость введения нового оборудования в эксплуатацию.

В работе [1], на основе принципа максимума Понтрягина, было построено оптимальное управление в задаче 3 - 5.

В настоящей работе представлено развитие модели 3 - 5 с шумпетеровской динамикой вида 1.

2. Модель оптимального инвестирования в основные производственные фонды предприятия с шумпетеровской динамикой

На основании двух вышеперечисленных работ поставлена задача оптимального управления инвестиционной политикой с шумпетеровской динамикой следующего вида

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_1 - \delta_1 x_1 + (1-\varphi_1)x_1, u_1(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^1, 0 \leqslant u \leqslant u_{max}\}, \\ \dot{x_2} = u_2 - \delta_2 x_2 + (1-\varphi_2)x_2 + \varphi_1 x_1, u_2(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^1, 0 \leqslant u \leqslant u_{max}\}, \end{cases} \tag{6}$$

$$x_i(0) = x_i^0, i = 1,2 \tag{7}$$

(8) $$u = (u_1, u_2) \in U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, u_1 + u_2 \leqslant u_{max}, u_i \geqslant 0, i = 1, 2\}$$

(9) $$0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1, i = 1, 2$$

(10) $$J(x, u) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t}[\sum_{i=1}^{2} a_i x_i(t) - b_i x_i^2(t) - c_i u_i(t)]dt \to max.$$

Замечание 1. *В отличие от модели 1 - 2 в данной работе величины $\varphi_i, i = 1, 2$ полагаются постоянными.*

Для решения поставленной задачи 6 - 10 используется принцип максимума Понтрягина. Гамильтониан имеет вид

(11) $$H(x, u, \psi) = (\psi_1 - c_1 e^{-\rho t})u_1 + (\psi_2 - c_2 e^{-\rho t})u_2 + g(x, \psi),$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ – вектор сопряженных переменных, а слагаемое $g(x, \psi)$ не содержит управления u. Обозначим, $a_i = \psi_i - c_i e^{-\rho t}$, $i = 1, 2$. Возможны 4 случая в зависимости от знака a_i, $i = 1, 2$. Если существует оптимальное управление u^*, оно имеет вид

(12) $$u^* = \begin{cases} (0, 0), \text{ если } a_1 < 0, a_2 < 0, \\ (0, u_{max}), \text{ если } a_1 < 0, a_2 > 0, \\ (u_{max}, 0), \text{ если } a_1 > 0, a_2 < 0, \\ (\hat{u}_1, \hat{u}_2), \text{ если } a_1 > 0, a_2 > 0, \end{cases}$$

где

(13) $$(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \begin{cases} (u_{max}, 0), \frac{a_1}{a_2} > 1, \\ (0, u_{max}), \frac{a_1}{a_2} < 1, \\ (\hat{u^*}_1, \hat{u^*}_2), \text{ где } \hat{u^*}_1 + \hat{u^*}_2 = u_{max}, \frac{a_1}{a_2} = 1 \end{cases}.$$

Очевидно, с экономической точки зрения, если некоторое $a_i < 0$, то это означает, что инвестирование в фонды на данным уровне эффективности i нецелесообразно. В случае, когда $a_i > 0$, $i = 1, 2$, распределение инвестиций определяется соотношением $\frac{a_1}{a_2}$, которое показывает, вложения в какой уровень обеспечат большую прибыль. В такой доминирующий уровень оптимально инвестировать все доступные средства. Если $a_1 = a_2$, т.е. уровни равнозначны, то конкретное распределение (u_1^*, u_2^*), где $u_1^* + u_2^* = u_{max}$, не имеет значения, поскольку прибыль будет одинакова. Случаи $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$ рассматриваются отдельно.

В работе исследуются достаточные условия существования оптимального управления на основе [1, 3].

3. Заключение

В докладе представлена модель оптимального инвестирования в основные производственные фонды предприятия с шумпетеровской динамикой. Для решения задачи применяется принцип максимума Понтрягина. Получен вид оптимального решения, исследуются достаточные условия существования оптимального решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-01-00249).

Список литературы

1. Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН. 2007. Т. 257. № 3 С. 3-271.
2. Гельман Л.М., Левин М.И. Полтерович В.М., Спивак В.А. Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии) // Экономика и математические методы. 1993. Т. 29, № 3 С. 460-469.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 574 с.
4. Полтерович В.М., Хенкин Г.М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и математические методы. 1988. № 24. С. 1071-1083.
5. Полтерович В.М. Теория эндогенного экономического роста и уравнения математической физики // Журнал Новой экономической ассоциации. 2017. № 2 (34) С. 193-201.
6. Хенкин Г.М., Шананин А.А. Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 8. С. 3-19.