

УДК 629.735: 51.74

# ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В УСЛОВИЯХ СМЕШАННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

**Г.С. Вересников**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65  
E-mail: [veresnikov@mail.ru](mailto:veresnikov@mail.ru)

**Л.А. Панкова**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65  
E-mail: [ludmila\\_pankova@bk.ru](mailto:ludmila_pankova@bk.ru)

**В.А. Пронина**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65  
E-mail: [valeria.pronina@gmail.com](mailto:valeria.pronina@gmail.com)

**И.Г. Башкиров**

*Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского*  
Россия, 140180, Россия, г. Жуковский, Жуковского ул., 1  
E-mail: [aerobig@mail.ru](mailto:aerobig@mail.ru)

**О.В. Огородников**

*Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского*  
Россия, 140180, Россия, г. Жуковский, Жуковского ул., 1  
E-mail: [lapom\\_13@mail.ru](mailto:lapom_13@mail.ru)

**Ключевые слова:** оптимальное проектирование, алеаторная неопределенность, эпистемическая неопределенность, неопределенно-случайная величина, расчет весовых параметров летательного аппарата.

**Аннотация:** В статье предлагается модель оптимизационной задачи с ограничениями в условиях параметрической смешанной неопределенности – алеаторной и эпистемической. Данная модель применяется, когда детерминированные значения параметров неизвестны и использование моделей, предназначенных для вычислений с точными значениями, может привести к неэффективным или недопустимым решениям. Параметры с эпистемической неопределенностью моделируются неопределенными величинами, введенными в теории неопределенности. Функция от случайных и неопределенных параметров моделируется неопределенно-случайной величиной, интерпретируемой как эпистемическая величина, параметризованная случайными величинами. С использованием предложенной модели формализуется и решается задача предварительного аэродинамического проектирования в условиях параметрической смешанной неопределенности – расчет весовых параметров пассажирского летательного аппарата.

## 1. Введение

При проектировании летательных аппаратов (ЛА), особенно на ранних стадиях, оптимизационные задачи обычно решаются в условиях параметрической смешанной неопределенности, когда целевые (выходные) функции содержат параметры как с алеаторной (объективной), так и с эпистемической (субъективной) неопределенностью.

Известны два подхода к моделированию величин со смешанной неопределенностью, основанные на разных интерпретациях этих величин [1-3]. Пусть  $f(\bar{\xi}, \bar{\omega})$  – функция от эпистемических величин  $\bar{\xi}$  и случайных величин  $\bar{\omega}$ , т.е. величина со смешанной неопределенностью. Первый подход рассматривает  $f(\bar{\xi}, \bar{\omega})$  как случайную величину, параметризованную эпистемическими величинами. Второй подход рассматривает  $f(\bar{\xi}, \bar{\omega})$  как эпистемическую величину, параметризованную случайными величинами.

Важно отметить, что основным принципом решения оптимизационных задач в условиях неопределенности является использование детерминированных дубликатов недетерминированных выходных функций и ограничений. В зависимости от задачи и предпочтений проектировщика в качестве дубликатов выходных функций выбираются различные характеристики функций: ожидаемое значение, дисперсия, квантильные значения и аналоги этих характеристик, а в качестве дубликатов ограничений – степень уверенности их выполнения: вероятность, возможность, мера неопределенности. Методы вычисления детерминированных дубликатов выходных функций и ограничений с неопределенными величинами обычно имеют значительную вычислительную сложность, т.к. в общем случае требуют использования имитационного и/или суррогатного моделирования. Теория неопределенности дает возможность получить аналитические выражения для детерминированных дубликатов монотонных функций от эпистемических величин, что существенно сокращает вычислительные затраты на решение задач оптимизации.

В разделе 2 предлагается модель оптимизационной задачи с ограничениями в условиях параметрической смешанной неопределенности. Эпистемические величины моделируются неопределенными величинами, введенными в теории неопределенности [4] (далее везде под неопределенными имеются в виду эти величины). Функция от случайных и неопределенных величин моделируется так называемой неопределенно-случайной величиной, интерпретируемой как эпистемическая величина, параметризованная случайными величинами, т.е. в рамках второго подхода моделирования величин со смешанной неопределенностью.

В разделе 3 задача расчета весовых параметров ЛА в условиях параметрической смешанной неопределенности формализуется как многокритериальная оптимизационная задача с ограничениями. При переходе к детерминированной постановке используется предложенная модель. Приводится метод решения задачи расчета весовых параметров.

## 2. Модель оптимизационной задачи с ограничениями в условиях параметрической смешанной неопределенности

Пусть  $\bar{x}$  – вектор решения,  $\bar{\xi}$  – вектор параметров,  $f(\bar{x}, \bar{\xi})$  – целевая функция,  $g(\bar{x}, \bar{\xi}) \leq 0$  – ограничение. Если вектор параметров содержит недетерминированные параметры, при формализации оптимизационной задачи переходят к различным детерминированным моделям с использованием дубликатов целевых функций и ограничений:

$$\min(\max)D(f(\bar{x}, \bar{\xi})) \text{ при условии } d(g(\bar{x}, \bar{\xi})) \leq 0.$$

где  $D$  – дубликат целевой функции  $f(\bar{x}, \bar{\xi})$ ,  $d$  – дубликат ограничений.

Пусть  $f(\bar{\xi}, \bar{\omega})$  – функция от неопределенных величин  $\xi_i, i=1, \dots, n$ , и случайных величин  $\omega_j, j=1..m$ , т.е. неопределенно-случайная величина. В рамках второго подхода интерпретируем  $f(\bar{\xi}, \bar{\omega})$  как неопределенную величину, параметризованную случайными величинами. Тогда характеристика  $S$  функции  $f(\bar{\xi}, \bar{\omega})$  определяется в два этапа. Сначала определяется эпистемическая характеристика  $S'$  функции  $f$  со случайными величинами как параметрами. Характеристика  $S'$  не зависит от неопределенных величин и как функция от случайных величин является случайной величиной. Затем вычисляется вероятностная характеристика случайной величины  $S'$ . Эта вероятностная характеристика определяется как характеристика  $S$  неопределенно-случайной величины  $f(\bar{\xi}, \bar{\omega})$ .

Пусть  $\bar{x}$  – вектор решения,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  – независимые неопределенные величины с распределениями  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ , имеющими обратные распределения,  $\omega_1, \dots, \omega_m$  – независимые случайные величины с распределениями  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m$ . Определим дубликат целевой функции  $f(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega})$ :  $S'$  – ожидаемое значение,  $S$  – математическое ожидание.

Если  $f(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega})$  – непрерывная строго возрастающая функция относительно  $\xi_1, \dots, \xi_k$  и строго убывающая функция относительно  $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ , то эпистемическая характеристика  $E^M(f(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega}))$  – ожидаемое значение функции  $f$  при параметрах –  $\bar{\omega}$  имеет вид [4]:

$$E^M(f(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega})) = \int_0^1 f(\bar{x}, \Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_k^{-1}(\alpha), \Phi_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha), \bar{\omega}) d\alpha.$$

Вероятностная характеристика  $E^P(E^M(f(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega})))$  – математическое ожидание случайной величины  $E^M(f(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega}))$  – имеет вид:

$$E^P(E^M(f(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega}))) = \int_{R^m} E^M(f(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega})) d\psi_1 \dots d\psi_m.$$

Рассмотрим представление дубликата ограничения  $g(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega}) \leq 0$ . В рамках второго подхода  $g(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega})$  есть неопределенная величина, параметризованная случайными величинами. Тогда дубликат ограничения  $g(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega}) \leq 0$  имеет вид:  $M(g(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega}) \leq 0) \geq \alpha$ , где  $M$  – мера неопределенности [4] (степень уверенности эксперта),  $\alpha$  – задается проектировщиком.

Если  $g(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega})$  – непрерывная строго возрастающая функция относительно  $\xi_1, \dots, \xi_k$  и строго убывающая функция относительно  $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ , то неравенство  $M(g(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\omega}) \leq 0) \geq \alpha$  эквивалентно неравенству [4]:

$$g(\bar{x}, \Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_k^{-1}(\alpha), \Phi_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha), \bar{\omega}) \leq 0.$$

Это неравенство содержит случайные величины и может быть заменено дубликатом – вероятностью выполнения этого неравенства:

$$P(g(\bar{x}, \Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_k^{-1}(\alpha), \Phi_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha), \bar{\omega}) \leq 0) \geq \beta,$$

где  $\beta$  – уровень вероятности, задаваемый проектировщиком.

Итак, оптимизационная модель имеет вид:

$$\min(\max) \int_{R^m} \int_0^1 f(\bar{x}, \Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_k^{-1}(\alpha), \Phi_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha), \bar{\omega}) d\alpha d\psi_1 \dots d\psi_m \text{ при условии } P(g(\bar{x}, \Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_k^{-1}(\alpha), \Phi_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha), \bar{\omega}) \leq 0) \geq \beta.$$

### 3. Расчет весовых параметров ЛА

Сформулируем задачу расчета весовых параметров ЛА как оптимизационную задачу с ограничениями в условиях смешанной неопределенности на основе методики расчета весовой сводки ЛА [5]. Согласно принятой методике формулы расчета основных показателей весовых характеристик ЛА на этапе предварительного проектирования имеют вид:

$$M_{fuel} = M_0 - M_{airframe} - M_{ch} - M_{pp} - M_{ec} - M_{rae} - M_{payload} - M_{pe}$$

$$M_0 = \gamma_a(V_a - V_{pc}) + M_{payload} + M_{pe}$$

$$M_{\text{airframe}} = (1 + K_m)q_s A_{\text{wet}}$$

$$q_s = k_{qs0} + (k_{qs1} + \lg V_a) \lg V_a$$

$$M_{ch} = 0.3 M_{\text{airframe}} K_{eq}$$

$$M_{pp} = \gamma_{eng} T (k_{eng0} + k_{eng1} \frac{V_a}{A_{\text{wet}}})$$

где  $M_0$  – взлетная масса;  $M_{\text{airframe}}$  – масса конструкции;  $M_{ch}$  – масса оборудования управления и гидравлики;  $M_{pp}$  – масса силовой установки;  $M_{fuel}$  – масса топлива;  $M_{ec}$  – масса экипажа и снаряжения;  $M_{rae}$  – масса бортового радиоэлектронного оборудования (БРЭО);  $M_{payload}$  – коммерческая нагрузка;  $M_{pe}$  – пассажирское оборудование;  $\gamma_a$  – средняя плотность самолета;  $V_a$  – объем самолета;  $V_{pc}$  – объем пассажирского отсека;  $K_m$  – коэффициент использования композитов;  $q_s$  – удельный вес 1 м<sup>2</sup> планера самолета;  $A_{\text{wet}}$  – площадь омываемой поверхности самолета;  $k_{qs0}$  – статистический коэффициент;  $k_{qs1}$  – статистический коэффициент;  $K_{eq}$  – коэффициент, учитывающий технологию производства;  $\gamma_{eng}$  – удельный вес двигателя, показывает отношение веса двигателя к максимальной тяге  $T$  на  $H = 0$ ,  $V = 0$  ( $H$ ,  $V$  – соответственно высота, скорость);  $T$  – потребная тяга на  $H = 0$ ,  $V = 0$ ;  $k_{eng0}$  – статистический коэффициент;  $k_{eng1}$  – статистический коэффициент.

Основная часть расходов эксплуатации ЛА состоит из затрат на топливо, поэтому при проектировании минимизируют массу конструкции ЛА, влияющую на расход топлива. Запас топлива является важной характеристикой, которая входит в формулу Бреге и определяет дальность полета ЛА. В связи с этим задача весового расчета может быть формализована и представлена в виде следующей модели оптимизации:

$$\begin{cases} \min M_0, \max M_{\text{fuel}}, \\ 400 \leq \gamma_a \leq 500, \\ 20 \leq V_a \leq 500, \\ M_0 - 0.8 M_{\text{fuel}} \leq M_{\text{landing}} \end{cases}$$

Вектор проектируемых параметров:  $A_{\text{wet}}$ ,  $V_a$ ,  $M_{\text{payload}}$ ,  $M_{pe}$ ,  $M_{rae}$ . Параметры с эпистемической неопределенностью:  $K_m$ ,  $K_{eq}$ ,  $V_{pc}$ ,  $M_{ec}$ ,  $\gamma_a$ . Параметры с алеаторной неопределенностью:  $k_{qs0}$ ,  $k_{qs1}$ ,  $k_{eng0}$ ,  $k_{eng1}$ ,  $\gamma_{eng}$ ,  $T$ .

Выражение  $M_0 - 0.8 M_{\text{fuel}} \leq M_{\text{landing}}$  определяет ограничение на посадочную массу ЛА. Ограничение на  $M_{\text{landing}}$  связано с длиной пробега при посадке, максимально допустимой вертикальной скоростью при посадке и т.д.

С использованием модели, предложенной в разделе 2, детерминированная двухкритериальная задача оптимизации с ограничениями имеет вид:

$$\begin{cases} \min E[M_0], \max E[M_{\text{fuel}}], \\ M(\gamma_a \leq 500) \geq \alpha_{\gamma_a}^{\leq}, \\ M(\gamma_a \geq 400) \geq \alpha_{\gamma_a}^{\geq}, \\ 20 \leq V_a \leq 500, \\ P(M_0 - 0.8 M_{\text{fuel}} \leq M_{\text{landing}}) \geq \alpha_{M_{\text{landing}}} \geq P_{M_{\text{landing}}}. \end{cases}$$

где  $M$  – мера неопределенности (степень уверенности эксперта),  $\alpha_{\gamma_a}^{\leq}$ ,  $\alpha_{\gamma_a}^{\geq}$ ,  $\alpha_{M_{\text{landing}}}$  – соответственно уровни степеней уверенности выполнения рассматриваемых неравенств,  $P_{M_{\text{landing}}}$  – уровень вероятности того, что степень уверенности выполнения неравенства  $M_0 - 0.8 M_{\text{fuel}} \leq M_{\text{landing}}$  будет больше  $\alpha_{M_{\text{landing}}}$ .

Для решения поставленной задачи сначала задаются  $\alpha_{\gamma_a}^{\leq}$ ,  $\alpha_{\gamma_a}^{\geq}$ ,  $\alpha_{M_{\text{landing}}}$ ,  $P_{M_{\text{landing}}}$ . Затем применяется алгоритм многокритериальной оптимизации. Для каждой комбинации варьируемых в процессе оптимизации проектируемых параметров вычисляются ожидаемые значения целевых функций по формулам:

$$E[M_0] = \int_0^1 (\Phi_{\gamma_a}^{-1}(\alpha)(V_a - \Phi_{V_{pc}}^{-1}(1 - \alpha)) + M_{\text{payload}} + M_{pe}) d\alpha,$$

$$E[M_{fuel}] = \int_{R^6} \left( \int_0^1 (M_0 - M_{airframe} - M_{ch} - M_{pp} - \Phi_{M_{ec}}^{-1}(1 - \alpha) - M_{rae} - M_{payload} - M_{pe}) d\alpha \right) d\psi_{k_{qs0}} d\psi_{k_{qs1}} d\psi_{k_{eng0}} d\psi_{k_{eng1}} d\psi_{\gamma_{eng}} d\psi_T,$$

где

$$M_0 = \Phi_{\gamma_a}^{-1}(\alpha)(V_a - \Phi_{V_{pc}}^{-1}(1 - \alpha)) + M_{payload} + M_{pe};$$

$$M_{ch} = 0.3M_{airframe} \Phi_{K_{eq}}^{-1}(1 - \alpha);$$

$$M_{airframe} = (1 + \Phi_{K_m}^{-1}(1 - \alpha))q_s A_{wet};$$

$\Phi_{\gamma_a}^{-1}$ ,  $\Phi_{V_{pc}}^{-1}$ ,  $\Phi_{M_{ec}}^{-1}$ ,  $\Phi_{K_{eq}}^{-1}$ ,  $\Phi_{K_m}^{-1}$  – соответственно обратные функции распределения неопределенности для параметров  $\gamma_a$ ,  $V_{pc}$ ,  $M_{ec}$ ,  $K_{eq}$ ,  $K_m$ ;  $\psi_{k_{qs0}}$ ,  $\psi_{k_{qs1}}$ ,  $\psi_{k_{eng0}}$ ,  $\psi_{k_{eng1}}$ ,  $\psi_{\gamma_{eng}}$ ,  $\psi_T$  – соответственно функции распределения вероятности для параметров  $k_{qs0}$ ,  $k_{qs1}$ ,  $k_{eng0}$ ,  $k_{eng1}$ ,  $\gamma_{eng}$ ,  $T$ .

Ограничение  $M(\gamma_a \leq 500) \geq \alpha_{\gamma_a}^{\leq}$  эквивалентно  $\Phi_{\gamma_a}^{-1}(\alpha_{\gamma_a}^{\leq}) \leq 500$ . Ограничение  $M(\gamma_a \geq 400) \geq \alpha_{\gamma_a}^{\geq}$  эквивалентно  $\Phi_{\gamma_a}^{-1}(1 - \alpha_{\gamma_a}^{\geq}) \geq 400$ . Для проверки ограничения на посадочную массу вычисляется вероятность того, что степень уверенности (мера неопределенности) выполнения данного ограничения будет больше заданного уровня:

$$P(M_0 - 0.8M_{fuel} \leq M_{landing}) \geq \alpha_{M_{landing}} \geq P_{M_{landing}}.$$

Это неравенство эквивалентно (см. раздел 2):

$$P(M_0 - 0.8M_{fuel} - M_{landing} \leq 0) \geq P_{M_{landing}},$$

где

$$M_0 = \Phi_{\gamma_a}^{-1}(\alpha_{M_{landing}})(V_a - \Phi_{V_{pc}}^{-1}(1 - \alpha_{M_{landing}})) + M_{payload} + M_{pe},$$

$$M_{fuel} = M_0 - M_{airframe} - M_{ch} - M_{pp} - \Phi_{M_{ec}}^{-1}(\alpha_{M_{landing}}) - M_{rae} - M_{payload} - M_{pe},$$

$$M_{ch} = 0.3M_{airframe} \Phi_{K_{eq}}^{-1}(\alpha_{M_{landing}}),$$

$$M_{airframe} = (1 + \Phi_{K_m}^{-1}(\alpha_{M_{landing}}))q_s A_{wet}.$$

Для расчета весовых параметров ЛА использовался многокритериальный генетический алгоритм и статистическое моделирование.

## 4. Заключение

Предложена модель оптимизационной задачи с ограничениями в условиях параметрической смешанной неопределенности. Параметры с эпистемической неопределенностью моделируются неопределенными величинами, введенными в теории неопределенности. С использованием предложенной модели формализована и решена одна из задач предварительного аэродинамического проектирования в условиях параметрической смешанной неопределенности – расчет весовых параметров летательного аппарата.

## Список литературы

1. Eldred S., Swiler T., Tang G.: Mixed aleatory-epistemic uncertainty quantification with stochastic expansions and optimization-based interval estimation // Reliability Engineering and System Safety. 2011. Vol. 96, No. 9. P. 1092-1113.
2. Lockwood B., Anitescu M., Mavripilis D. Mixed aleatory/epistemic uncertainty quantification for hypersonic flows via gradient-based optimization and surrogate models // 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting. 2012. AIAA-2012-1254.
3. Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей. М.: Физматлит, 2016, 144 с.
4. Liu B. Uncertainty Theory. <http://or.sc.edu.cn/liu/ut.pdf>.

5. Иродов Р.Д., Башкиров И.Г., Колоколова Л.Г. Летно-технические характеристики сверхзвуковых самолетов // *Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов*/ Под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Российская академия наук («Наука» РАН), 2016. С. 579-620.