УДК 51-7

# МОДЕЛЬ АСИНХРОННОЙ ПОРОГОВОЙ СИСТЕМЫ

**О.П. Кузнецов**
*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: olpkuz@yandex.ru

**Ключевые слова:** агент, асинхронная пороговая система, потенциал агента, репертуар поведений.

**Аннотация**: Предложена модель асинхронной пороговой системы – сети из пороговых элементов (агентов), функционирующих в асинхронном времени. Агенты взаимодействуют, генерируя сигналы определенного сорта (цвета) и мощности. Сигнал воспринимается всеми агентами, у которых есть входы того же цвета; действие сигнала может быть возбуждающим или тормозящим. Агент обладает потенциалом, определяющим состояние агента: при потенциале выше некоторого порога агент активен, в противном случае пассивен. Скорость изменения потенциала – это сумма эндогенной скорости, зависящей от типа агента, и экзогенной скорости, зависящей от суммарной мощности сигналов, к которым чувствителен данный агент. Различия в скоростях приводят к асинхронности взаимодействий. Показана зависимость поведения сети (последовательности ее состояний) в автономном режиме от значений параметров сети (весов, порогов и др.). Такая система может интерпретироваться как нейронная система с химическими взаимодействиями, а также как социальная сеть с разными типами информационных обменов.

## 1. Введение

Предлагаемая модель возникла в результате упрощения имитационной модели химических взаимодействий между нейронами [1]. Упрощенная модель имеет более прозрачный вид и позволяет формулировать и доказывать утверждения о ее свойствах.

## 2. Формальная модель – основные определения

Определим *асинхронную пороговую систему* $\mathbf{S} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{T} \rangle$, где $\mathbf{N} = \{N_1, \ldots, N_n\}$ – множество агентов, $\mathbf{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$ – множество абстрактных цветов, **H** – множество параметров системы, **T** – непрерывное время, в котором функционирует система. Агенты могут находиться в одном из двух состояний – активном и пассивном. Моменты изменения состояния любого агента – это *события*, которые являются точками на шкале времени **T**, разбивающими шкалу на отрезки – такты. Границы тактов нумеруются натуральными числами 0, 1, 2, … и называются дискретными моментами времени. Такт $t$ – это интервал между моментами $t$ и $t + 1$. Его длительность (разная для разных тактов) обозначается $\tau(t)$.

*Активность* агента $N_i$ задается величиной $y_i(t) \in \{0, 1\}$; $y_i(t) = 1$ означает, что на такте $t$ агент *активен*; $y_i(t) = 0$ означает, что на такте $t$ агент *пассивен*. Выход агента имеет цвет из множества **C**. По характеру активности агенты делятся на два типа: *инициативный* и *реактивный*. Инициативный агент пассивен только при достаточно сильных тормозящих воздействиях; в остальное время он активен. Реактивный агент становится активным только при достаточно сильных возбуждающих воздействиях; иначе он пассивен. Активный агент генерирует сигнал, имеющий цвет $c_j$ и мощность $d_{ij}$.

Агент $N_i$ имеет входы, каждый из которых имеет цвет $c_j$ из множества **C** и вес $w_{ij} \in \mathbf{R}$. Разные входы имеют разные цвета. Вес $w_{ij} = 0$ означает, что у агента $N_i$ нет входа цвета $c_j$; $w_{ij} > 0$ означает, что сигнал, пришедший на вход цвета $c_j$, оказывает на агента возбуждающее воздействие, $w_{ij} < 0$ означает тормозное воздействие.

Совокупность цветов, присвоенных входам и выходам агента $N_i$, а также знаков весов его входов будем называть *разметкой* агента. Цвета однозначно определяют связи между агентами: ориентированная связь от агента $N_k$ к агенту $N_l$ существует, если $N_l$ имеет вход, цвет которого совпадает с цветом выхода $N_k$. Соответственно, каждая связь тоже имеет цвет. Сигнал цвета $c_j$ распространяется по всем связям этого цвета.

*Внешним (наблюдаемым) состоянием системы* в момент $t$ называется вектор состояний активности всех агентов системы, т.е. вектор $Y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$.

*Пространство сигналов* характеризуется вектором $X(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, где $x_j(t)$ – суммарная мощность сигналов цвета $c_j$, генерируемых на протяжении такта $t$ и распространяемых по связям этого цвета. Она вычисляется по формуле

(1) $$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} \cdot y_i(t)$$

Изменение состояния агента $N_i$ определяется значением его *потенциала* $U_i(t)$ – динамической величины, которая изменяется в интервале $U_{i0} \le U_i(t) \le U_{i\max}$. Агент активен, если величина $U_i(t)$ не меньше порогового значения $P_i$, которое также находится в интервале $U_{i0} < P_i < U_{i\max}$:

(2) $$y_i(t) = \begin{cases} 1, \text{если } U_i(t) \ge P_i; \\ 0 \ \ \text{иначе.} \end{cases}$$

Внутри такта потенциал изменяется линейно, т.е. с постоянной в пределах такта *суммарной скоростью* $v_i(t)$:

(3) $$v_i(t) = s_i(t) + v_{i\text{en}}^{\alpha}(t),$$

где $s_i(t)$ – *экзогенная скорость*, пропорциональная силе внешних воздействий:

(4) $$s_i(t) = h \cdot \sum_{j=1}^{m} w_{ij} x_j(t),$$

$v_{i\text{en}}^{\alpha}$ – эндогенная скорость, т.е. собственная скорость агента, не зависящая от внешних воздействий; в дальнейшем полагаем $h = 1$.

Каждый агент имеет два значения эндогенной скорости:

(5) $$v_{i\text{en}}^{\alpha}(t) = \begin{cases} v_{i\text{en}}^{0}, \text{если } U_i(t) < P_i \\ v_{i\text{en}}^{1}, \text{если } U_i(t) \ge P_i \end{cases},$$

причем для инициативного агента обе скорости положительны, для реактивного агента обе скорости отрицательны и для обоих типов агентов $v_{ien}^{0} < v_{ien}^{1}$.

Параметры, участвующие в определении пороговой системы **S** (формулы (1)-(4)), разбиваются на два класса: *статические* (не меняющиеся во времени) и *динамические параметры*. Статические параметры образуют множество **H**. К ним относятся границы изменения потенциалов $U_{i0}$ и $U_{i\max}$, величины порогов, веса входов $w_{i1}, ..., w_{im}$, мощности сигналов $d_{i1}, ..., d_{1m}$ эндогенные скорости $v_{i\text{en}}^{0}$ и $v_{i\text{en}}^{1}$; динамические параметры – это величины, меняющиеся со временем: $y_i(t)$, $U_i(t)$, $v_i(t)$ и др.

В дальнейшем считаем, что система **S** = <**N, C, H, T**> состоит из двух компонент: пороговой сети и ее параметров. Асинхронная пороговая сеть Σ системы **S** однозначно определяется множествами **N**, **C** и разметками агентов; множество параметров **H** перечислено выше. Такое разделение позволяет говорить об изменениях параметров без изменения сети. Две пороговые системы, имеющие одну и ту же сеть Σ, но отличающиеся наборами параметров $\mathbf{H}_k$ и $\mathbf{H}_l$, будем называть конфигурациями сети Σ и обозначать $\Sigma(\mathbf{H}_k)$ и $\Sigma(\mathbf{H}_l)$. В дальнейшем асинхронную пороговую систему будем обозначать аббревиатурой АПС, а автономную пороговую сеть называть просто сетью.

# 3. Динамика системы и ее вычисление

## 3.1. Алгоритм функционирования пороговой системы

Алгоритм, моделирующий функционирование АПС, т.е. вычисляющий последовательность ее внешних состояний в моменты времени 0, 1, ..., $t$, $t+1$,…, должен, зная состояние системы в момент $t$, вычислить ее состояние в момент $t+1$. Однако в асинхронной системе вычислению состояния в момент $t+1$ предшествует вычисление самого момента $t+1$, т.е. длительности $\tau(t)$ такта $[t, t+1)$ и положения момента $t+1$ на шкале непрерывного времени. Это вычисление связано с пересчетом на каждом такте динамических параметров системы.

К введенным ранее динамическим параметрам $y_i(t)$, $x_j(t)$, $U_i(t)$, $s_i(t)$, $v_i(t)$ добавим несколько новых динамических параметров. *Остаточным потенциалом* $\Delta U_i(t)$ в момент $t$ назовем величину, равную «расстоянию» до наступления *ближайшего события*, связанного с агентом $N_i$. Ближайшее событие для агента определяется *таблицей переходов*, одинаковой для обоих типов агентов; ее общий вид приведен на таблице 1. Знак $\infty$ означает, что значение потенциала агента $N_i$ в такте $t$, быть может, меняется, но не достигнет порога; соответственно, значение активности $N_i$ не изменится и ближайшее событие не связано с агентом $N_i$. Если $v_i(t) = 0$, то $\Delta U_i(t) = \Delta U_i(t-1)$, поэтому этот случай в таблице отсутствует.

**Таблица 1**. Таблица переходов для агентов.

| | $U_i(t)$ | Знак $v_i(t)$ | Ближайшее событие | $\Delta U_i(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $U_i(t) \geq P_i$ | + | Движение вверх, активность не меняется, события нет | $\infty$ |
| 2 | $U_i(t) \geq P_i$ | – | $y_i = 0$ | $U_i(t) - P_i$ |
| 3 | $U_i(t) < P_i$ | + | $y_i = 1$ | $P_i - U_i(t)$ |
| 4 | $U_i(t) < P_i$ | – | Движение вниз, активность не меняется, события нет | $\infty$ |

*Остаточное время* $\tau_{ri}(t)$ *агента* $N_i$ – это время, которое нужно для достижения ближайшего события при текущем потенциале $U_i(t)$ и текущей скорости $v_i(t)$.

(6) $$\tau_{ri}(t) = \begin{cases} \frac{\Delta U_i(t)}{|v_i(t)|}, \text{если } v_i \neq 0 \text{ и } \Delta U_i(t) \neq \infty \\ \infty \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Последовательность внешних состояний $Y(0)$, $Y(1)$, $Y(2)$, …, порождаемую АПС в процессе ее функционирования, будем называть *поведением* пороговой системы. В дальнейшем будет рассматриваться автономное поведение системы, т.е. поведение при отсутствии внешних воздействий.

**Теорема 1.** *Автономное поведение АПС однозначно определяется вектором* $U(0) = (U_1(0), \ldots, U_n(0))$ *и множеством статических параметров* $\mathbf{H}$.

Покажем, что для любого $t$, если заданы $U(t)$ и $\mathbf{H}$, то существует алгоритм, вычисляющий $Y(t)$ и $U(t+1)$. Этот алгоритм выглядит так:

1. Вектор $Y(t)$ вычисляется по формуле (2).
2. Вектор $X(t)$ вычисляется по формуле (1).

3. Силы воздействия $s_1(t)$, ..., $s_n(t)$ вычисляются по формуле (4).

4. Суммарные скорости $v_1(t)$, ..., $v_n(t)$ вычисляются по формулам (3)-(5).

5. Остаточные потенциалы вычисляются по таблице переходов (таблица 1).

6. Остаточные времена вычисляются по формуле (6).

7. Если минимальное остаточное время $\tau_{\min}(t) = \tau_i(t)$, то длина такта $t$ $\tau(t) = \tau_i(t)$; событием является изменение активности агента $N_i$; внешнее состояние $Y(t+1)$ отличается от $Y(t)$ значением $y_i(t+1)$.

8. Потенциалы для момента $t+1$ пересчитываются по формуле

$$U_i(t+1) = \begin{cases} U_{i\max}, \text{если } U_i(t) + \tau(t)\cdot v_i(t) \geq U_{i\max} \\ U_{i0}, \text{если } U_i(t) + \tau(t)\cdot v_i(t) \leq U_{i0} \\ U_i(t) + \tau(t)\cdot v_i(t) \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (7)$$

9. Перейти к п. 1 для $t+1$.

Теорема доказана. В дальнейшем вектор $U(t)$ будем называть *внутренним состоянием* АПС. Таблицу, в которой отражены значения динамических параметров системы в последовательных тактах ее функционирования, назовем *протоколом*.

## 3.2. Анализ репертуара поведений автономной пороговой сети

Из теоремы 1 видно, что поведение автономной АПС зависит от значений ее параметров. Исследование этой зависимости должно ответить на два типа вопросов:

– какие виды поведений могут генерировать автономные пороговые сети?

– каковы свойства множества поведений, которые может генерировать конкретная автономная сеть (такое множество будем называть *репертуаром сети*)?

Напомним некоторые известные понятия и введем ряд определений.

Бесконечная последовательность $a_0$, $a_1$, … называется *периодической*, если она имеет вид $a_0$, …, $a_{k-1}$, ($a_k$, …, $a_{l-1}$), где отрезок $a_k$, …, $a_{l-1}$ повторяется бесконечное число раз. Этот отрезок называется *периодом*, а отрезок $a_0$, $a_1$, …, $a_{k-1}$ – *предпериод*ом. Длиной предпериода является целое число $k \geq 0$, а длиной периода – целое число $l - k \geq 1$.

В любом поведении АПС два соседних вектора ($Y(t)$, ($Y(t+1)$ отличаются хотя бы в одном разряде, поскольку в момент $t+1$ изменилось состояние хотя бы одного агента. Поэтому для поведений автономной АПС случай $l - k = 1$ соответствует тому, что, начиная с момента $k$, событий не происходит: потенциалы всех агентов соответствуют строкам 1 или 4 таблицы 2 и последовательность $Y(0)$, …, $Y(k)$ становится конечной. Последовательность $Y(0)$, …, $Y(k-1)$, ($Y(k)$, …, $Y(l-1)$) назовем *периодическим поведением*, если $l - k > 1$, и *стационарным поведением*, если $l - k = 1$. Стационарное поведение конечно; его заключительное состояние $Y(k)$ также будем называть *стационарным*.

**Пример.** В сети на рис.1 $N_1$ и $N_3$ – инициативные агенты, $N_2$ – реактивный агент. Статические параметры приведены в таблице 2. Квадратиками на концах связей обозначены возбуждающие связи, кружками – тормозящие связи. Агент $N_1$ генерирует сигнал $c_1$ (красный), агенты $N_2$ и $N_3$ – сигнал $c_2$ (зеленый). В таблице 3 приведен протокол.

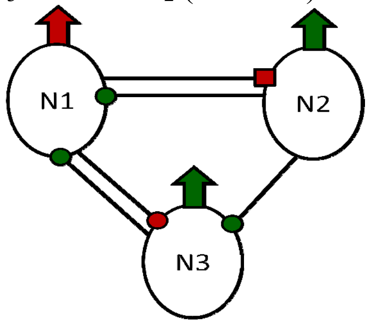


**Рис. 1.** Пример автономной пороговой системы.

**Таблица 2.** Параметры системы на рис. 1.

| | $P_i$ | $U_{i\max}$ | $U_{i0}$ | $v_{ien}^0$ | $v_{ien}^1$ | $c_1$ | $c_2$ | $w_{i1}$ | $w_{i2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_1$ | 0,6 | 0,9 | 0 | 0,5 | 0,8 | 0,7 | – | 0 | –1 |
| $N_2$ | 0,6 | 0,9 | 0 | –0,5 | -0,8 | – | 0,7 | 2 | 0 |
| $N_3$ | 0,6 | 0,9 | 0 | 0,5 | 0,8 | – | 0,7 | –1 | –1 |

**Таблица 3.** Протокол работы системы.

| № $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $Y(t)$ | 101 | 100 | 110 | |
| $U_1(t)$ | 0,9 | 0,9 | 0,9 | |
| $U_2(t)$ | 0 | 0,3 | 0,6 | |
| $U_3(t)$ | 0,9 | 0,6 | 0,5 | |
| $\tau(t)$ | 0,5 | 0,5 | $\infty$ | |
| $v_1$ | 0,1 | 0,8 | 0,1 | |
| $v_2$ | 0,6 | 0,6 | 0,9 | |
| $v_3$ | 0,6 | – 0,2 | – 0,9 | |

Состояние 110 на такте 2 стационарно, потому что скорости $v_1$ и $v_2$ активных агентов $N_1$ и $N_2$ положительны (их потенциалы остаются выше порога), а скорость пассивного агента $N_3$ отрицательна (его потенциал остается ниже порога).

Автономная АПС представляет собой автономный автомат, в котором состояниями служат векторы $U(t)$. Известно [1], что автономный конечный автомат с $M$ состояниями генерирует периодическую последовательность состояний, причем длины периода и предпериода не превосходят $M$. Для автономной АПС множество состояний (значений потенциалов) бесконечно. Поэтому утверждение о длинах неверно, а вопрос о том, всегда ли автономная АПС генерирует периодическое поведение, остается открытым.

Состояние сети $U(t)$ назовем *естественным*, если для любого инициативного агента $N_i$ $U_i(0) > P_i$, а для любого реактивного агента $N_j$ $U_j(0) < P_i$.

**Теорема 2.** *Для любой автономной асинхронной сети* $\Sigma$ *и любого естественного состояния* $U(0)$ *существует такой набор параметров* $\mathbf{H}$, *при котором в конфигурации* $\Sigma(\mathbf{H})$ $U(0)$ *является стационарным.*

**Теорема 3.** *Существуют сети, все поведения которых стационарны.*

Такими сетями являются ациклические сети (сети, граф которых – ациклический).

# 4. Заключение

Предложенная модель интерпретируется как нейронная сеть с химическими взаимодействиями [2] и как социальная сеть с разными типами информационных обменов (см., например, [3]).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты № 17-29-07029, 17-07-00541).

# Список литературы

1. Минский М. Вычисления и автоматы. М.: Мир, 1971.
2. Кузнецов О.П., Базенков Н.И., Болдышев Б.А., Жилякова Л.Ю., Куливец С.Г., Чистопольский И.А. Асинхронная дискретная модель химических взаимодействий в простых нейронных системах // Искусственный интеллект и принятие решений. 2018, № 2. С. 3-20. DOI 10.14357/20718594180201.
3. Zhilyakova L., Gubanov D. Double-threshold Model of the Activity Spreading in a Social Network. The Case of Two Types of Opposite Activities // Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Application of Information and Communication Technologies AICT 2017. 2017. Vol. 2. P. 267-270.