УДК 517.929.4

УСТОЙЧИВОСТЬ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

А.П. Жабко
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35, факультет ПМ-ПУ СПбГУ
E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru

В.В. Провоторов
Воронежский государственный университет
Россия, 394006, Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: wwprov@mail.ru

1. Введение

В настоящее время имеется немало результатов по математической теории устойчивости, однако, как нам известно, все они в подавляющем числе случаев ориентированы на обыкновенные дифференциальные и дифференциально-разностные уравнения [1, 2]. В многочисленных приложениях из-за сложности математических моделей приходится отказываться от указанных дифференциальных систем в пользу рассмотрения эволюционных уравнений с частными производными. Примером таких динамических процессов может служить анализ устойчивости течения многофазных жидкостей в трубопроводах. Именно этот случай есть предмет изучения в представленной работе: сделана попытка ввести понятие устойчивости эволюционной системы с распределенными параметрами на графе. Изучая соответствующую начально-краевую задачу, мы выходим за рамки классических решений и обращаемся к слабым решениям задачи (т. е. рассматриваем начально-краевые задачи в слабой постановке), отражающие более тесно физическую сущность явлений и процессов. При этом, выбор класса слабых решений, определяемого тем или иным функциональным пространством, находится в распоряжении исследователя и обусловлен, прежде всего, требованием сохранения теоремы существования и теоремы единственности; последнее, если это соответствует духу изучаемого явления или процесса.

2. Основные понятия, вспомогательные утверждения

Введем следующие понятия и обозначения, принятые в [3]:

Γ – ограниченный ориентированный геометрический граф с ребрами γ, параметризованными отрезком $[0,1]$; $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ – множества граничных ζ и внутренних ξ узлов графа, соответственно; Γ_0 – связный подграф графа Γ, составленный из всех его ребер и не содержащий множества граничных узлов: $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Gamma$;

$$\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0,t) \ (\gamma_t = \gamma_0 \times (0,t)), \ \partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0,t) \ (t \in (0,T],\ T < \infty).$$

На протяжении всей работы используются классические пространства функций [4]:

$L_p(\Gamma)$ ($p = 1, 2$) – банахово пространство измеримых на Γ_0 функций, суммируемых с p-й степенью (аналогично определяются пространства $L_p(\Gamma_T)$),

$L_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$, $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T (\int_\Gamma u^2 dx)^{\frac{1}{2}} dt$,

а также аналоги пространств Соболева:

$W_2^1(\Gamma)$ – пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$,

$W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ – пространство функций из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по x, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$ (аналогично вводится пространство $W_2^1(\Gamma_T)$),

$V_2(\Gamma_T)$ – множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ с конечной нормой

(1) $$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0 \le t \le T} \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma_T)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)}$$

и непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$.

Введем пространство состояний параболической системы и вспомогательные пространства. Рассмотрим билинейную форму

$$\ell(\mu,\nu) = \int_\Gamma \left(a(x) \frac{d\mu(x)}{dx} \frac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x) \right) dx$$

с фиксированными измеримыми и ограниченными на Γ_0 функциями $a(x)$, $b(x)$, суммируемыми с квадратом: $0 < a_* \le a(x) \le a^*, |b(x)| \le \beta$, $x \in \Gamma_0$.

Если функция $u(x) \in W_2^1(\Gamma)$ и $\ell(u,\nu) - \int_\Gamma f(x)\eta(x)dx = 0$ для любой $\eta(x) \in W_2^1(\Gamma)$ ($f(x) \in L_2(\Gamma)$ – фиксированная функция), то (лемма 1 [4]) для любого ребра $\gamma \subset \Gamma$ сужение $a(x)_\gamma \dfrac{du(x)_\gamma}{dx}$ непрерывно в концевых точках ребра γ. Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество таких функций $u(x)$, удовлетворяющих соотношениям $\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \dfrac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \dfrac{du(0)_\gamma}{dx}$ во всех узлах $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ – множества ребер γ, соответственно ориентированных «к узлу ξ» и «от узла ξ») и $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$. Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W_0^1(a,\Gamma)$.

Пусть далее $\Omega_a(\Gamma_T)$ – множество функций $u(x,t) \in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) как функции класса $W_0^1(a,\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

(2) $$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial u(1,t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial u(0,t)_\gamma}{\partial x}$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_a(\Gamma_T)$ по норме (1) обозначим через $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$; ясно, что $V^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$.

Другим подпространством пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ является $W^1(a,\Gamma_T)$ – замыкание в норме $W_2^1(\Gamma_T)$ множества гладких функций $u(x,t)$ на Γ_0, удовлетворяющих соотношениям (2) для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$ и краевому условию $u(x,t)|_{\partial\Gamma} = 0$ для любого $t \in [0,T]$ (производные в узлах определяются как односторонние).

Замечание 1. Пространство $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ описывает множество состояний параболической системы, $W^1(a,\Gamma_T)$ – вспомогательное.

В пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ рассматривается параболическое уравнение

(3) $$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)y(x,t) = f(x,t),$$

представляющее собой систему дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на каждом ребре γ графа Γ; $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Состояние $y(x,t)$ $(x,t \in \overline{\Gamma}_T)$ системы (3) в области $\overline{\Gamma}_T$ определяется слабым решением $y(x,t)$ уравнения (3), удовлетворяющим начальному и краевому условиям

(4) $$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad y|_{x\in\partial\Gamma_T} = 0; \ \varphi(x) \in L_2(\Gamma).$$

Предположения относительно функций $a(x)$ и $b(x)$ указаны выше. Из $y(x,t) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ следует, что отображение $y:[0,T] \to W_0^1(a,\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ является непрерывной функцией, так что первое равенство в (4) имеет смысл и понимается почти всюду.

Определение 1. *Слабым решением начально-краевой задачи* (3), (4) *называется функция* $y(x,t) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$*, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int_\Gamma y(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_t} y(x,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_t(y,\eta) = \int_\Gamma \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

для любой функции $\eta(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$ *и при любом* $t \in [0,T]$.

Приведем необходимые утверждения, полные доказательства которых представлены в работах [3].

Теорема 1. *Спектральная задача*

(5) $$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + b(x)u(x) = \lambda u(x), u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$$

в классе $W_0^1(a,\Gamma)$ *имеет счетное множество действительных собственных значений* $\{\lambda_i\}_{i\ge1}$ (*занумерованных в порядке возрастания с учетом их кратностей*) *с предельной точкой на бесконечности* (*собственные значения* λ_i *положительны, за исключением, может быть, конечного числа первых*). *Система обобщенных собственных функций* $\{u_i(x)\}_{i\ge1}$ *образует базис в* $W_0^1(a,\Gamma)$ *и* $L_2(\Gamma)$, *ортонормированный в* $L_2(\Gamma)$ *и ортогональный в смысле скалярного произведения* $[u,v] = \ell(u,v) + \beta(u,v)$, *где* β *выбрано так, что* $\beta < \lambda_1$.

Замечание 2. Если $b(x) \ge 0$, как это имеет место в приложениях, то все собственные значения спектральной задачи (5) неотрицательны. Неотрицательность собственных значений является определяющим фактором для установления свойства устойчивости эволюционных систем параболического типа с распределенными параметрами на графе.

Теорема 2. *При любых* $f(x) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ *начально-краевая задача* (3), (4) *однозначно слабо разрешима в пространстве* $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ *для любого* $0 < T < \infty$.

При доказательстве утверждения теоремы используется метод Фаедо-Галеркина с базисом $\{u_i(x)\}_{i \geq 1}$ (теорема 1).

Преследуя цель простоты дальнейшего изложения, несколько сузим пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$, заменив его на $CL_{2,1}(\Gamma_T) \subset L_{2,1}(\Gamma_T)$ ($CL_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство функций из $L_{2,1}(\Gamma_T)$, непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$), считая $f(x,t) \in CL_{2,1}(\Gamma_T)$ (последнее является необременительным условием в приложениях). В этом случае, как показано в работе [3], слабое решение $y(x,t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ задачи (3), (4) для любого $0 < T < \infty$ представимо в виде ряда

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\varphi_i e^{-\lambda_i t} + \int_0^t f_i(\tau) e^{-\lambda_i (t-\tau)} d\tau \right) u_i(x), \tag{6}$$

где $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i u_i(x)$, $\varphi_i = \int_{\Gamma} \varphi(x) u_i(x) dx$, $f(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) u_i(x)$, $f_i(t) = \int_{\Gamma} f(x,t) u_i(x) dx$, $t \in [0, T]$.

В многочисленных приложениях, где необходимо исследовать свойства решений $y(x,t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ задачи (3), (4) для произвольного конечного T, важно знать поведение $y(x,t)$ при $t \to +\infty$, т. е. при $t \in [0, \infty)$. Приведем достаточно простое и необременительное для использования условие существования функции $f(x,t)$ в области $\Gamma \times [0, \infty)$

Теорема 3. *Пусть* $f(x,t) \in CL_{2,1}(\Gamma_T)$, *причем* $\int_t^{t+1} \| f(\cdot, \varsigma) \|^2_{L_2(\Gamma)} d\varsigma \leq A$ *для любого* $t \geq 0$ *(*A *– фиксированная постоянная), тогда функция* $f(x,t)$ *определена в области* $\Gamma \times [0, \infty)$ *и* $f(x,t) \in CL_{2,1}(\Gamma_\infty)$.

3. Устойчивость параболической системы

Предположим, что $b(x) > 0$ для $x \in \Gamma$, что гарантирует неотрицательность собственных значений λ_i, $i \geq 1$ (замечание 2) и пусть $\lambda_1 > 0$. Рассмотрим систему (3) на множестве $\Gamma_\infty = \Gamma_0 \times (0, \infty)$. Обозначим через $\Gamma_{t_0,t} = \Gamma_0 \times (t_0, t)$, $\partial\Gamma_{t_0,t} = \partial\Gamma \times (t_0, t)$ ($0 < t_0 < t < \infty$), $\Gamma_{t_0,\infty} = \Gamma_0 \times (t_0, \infty)$, $\partial\Gamma_{t_0,\infty} = \partial\Gamma \times (t_0, \infty)$; ясно, что $\Gamma_{t_0,t} \subset \Gamma_t$. Считаем, что выполнены условия теорем 2 и 3.

Пусть функция $\overline{y}(x,t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_{t_0,\infty})$ является слабым решением уравнения (3) с начальным $\overline{y}|_{t=t_0} = \overline{\varphi}(x)$ ($x \in \Gamma$) и краевым $y|_{x \in \partial\Gamma_{t_0,\infty}} = 0$ ($t \in (t_0, \infty)$) условиями, а функция $y(x,t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_{t_0,\infty})$ – слабое решение уравнения (3) с теми же начальным и краевым условиями, только $\overline{\varphi}(x)$ заменена на $\varphi(x)$ ($\overline{\varphi}(x) \neq \varphi(x)$). Состояние $\overline{y}(x,t)$

системы (3) назовем невозмущенным, а $y(x,t)$ – возмущенным. В силу представления (6) состояния $\overline{y}(x,t)$ и $y(x,t)$ определены в области $\Gamma_{t_0,\infty}$.

Следуя определениям устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости для динамических систем [5, 6], введем эти понятия для рассматриваемых уравнений.

Определение 2. *Невозмущенное состояние* $\overline{y}(x,t)$ *системы* (3) *называется устойчивым в норме пространства* $W_2^1(\Gamma)$*, если для любых* $t_0>0$ *и* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta(t_0,\varepsilon)>0$ *такое, что при* $\|\varphi-\overline{\varphi}\|_{L_2(\Gamma)}<\delta(t_0,\varepsilon)$ *выполняется* $\|y(\cdot,t)-\overline{y}(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Gamma)}<\varepsilon$ *при* $t\ge t_0$*, где* $y(x,t)$ *– возмущенное состояние системы* (3).

Определение 3. *Невозмущенное состояние* $\overline{y}(x,t)$ *системы* (3) *называется равномерно асимптотически устойчивым в норме пространства* $W_2^1(\Gamma)$*, если для любых* $t_0>0$ *и* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta(\varepsilon)>0$ *такое, что при* $\|\varphi-\overline{\varphi}\|_{L_2(\Gamma)}<\delta(\varepsilon)$ *выполняется* $\|y(\cdot,t)-\overline{y}(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Gamma)}<\varepsilon$ *при* $t\ge t_0$*, где* $y(x,t)$ *– возмущенное состояние системы* (3) *и, кроме того,* $\|\varphi-\overline{\varphi}\|_{L_2(\Gamma)}\to 0$ *при* $t\to\infty$ *равномерно относительно* $t-t_0$.

Теорема 4. *Пусть в* (3) $b(x)>0$, $x\in\Gamma$ *и первое собственное значение* λ_1 *положительно, тогда невозмущенное состояние системы* (3) *в области* Γ_T *устойчиво в норме* $W_2^1(\Gamma)$.

Следствие. *Если выполнены условия* теоремы 4 *и, кроме того,* $b(x)\ge k>0$*, тогда невозмущенное состояние системы* (3) *в области* Γ_T *равномерно асимптотически устойчиво в норме* $W_2^1(\Gamma)$.

Список литературы

1. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об асимптотической устойчивости положений равновесия нелинейных механических систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 2. С. 143-150.
2. Alexandrova I.V., Zhabko A.P. A new LKF approach to stability analysis of linear systems with uncertain delays // Automatica. 2018. Vol. 91. P. 173-178.
3. Провоторов В.В., Провоторова Е.Н. Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13, Вып. 2. С. 89-104.
4. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.
5. Зубов В.И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1984. 232 с.
6. Жабко А.П., Тихомиров О.Г., Чижова О.Н. О стабилизации класса систем с пропорциональным запаздыванием // Вестник СПбГУ. Сер. Прикладная математика, информатика, процессы управления, 2018. Т. 14, Вып. 2. С. 165-172.