УДК 519.674

# $\mathcal{D}$-РАЗБИЕНИЕ ДЛЯ СЛОЖНОГО МНОЖЕСТВА ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

**А.А. Тремба**
*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: atremba@ipu.ru

**Ключевые слова:** $\mathcal{D}$-разбиение, локализация корней, регуляторы низкого порядка, графические методы.

**Аннотация:** В задаче настройки регуляторов низкого порядка (с двумя или тремя коэффициентами) используется метод $\mathcal{D}$-разбиения, позволяющий полностью описать множество подходящих стабилизирующих регуляторов графо-аналитическим способом. При этом качество регулятора косвенно определяется расположением корней характеристического полинома, например, можно искать полином с заданной степенью устойчивости. В большинстве работ множество локализации корней (множество, в котором должны лежать все корни характеристического полинома), односвязно. В работе предлагается модификация метода $\mathcal{D}$-разбиения для более сложных случаев, когда корни характеристического полинома должны лежать в нескольких, не связных компонентах заданного множества, также рассмотрены множества с «дырами».

## 1. Введение

Графические (графо-аналитические) методы анализа и синтеза линейных систем управления доказали свою полезность на практике. Общеизвестны годографы Михайлова и Найквиста для анализа устойчивости, годограф Цыпкина-Поляка для анализа робастной устойчивости полинома. Эти графики относятся к частотным критериям, и изображаются в комплексной плоскости. Корневые годографы, также изображаемые на комплексной плоскости, удобны и наглядны при анализе зависимости систем от одного вещественного параметра.

При синтезе регуляторов линейных SISO систем также можно использовать графические методы, особенно, когда число варьируемых параметров (обычно — коэффициентов регулятора) невелико. Так, на плоскости двух выбранных параметров можно построить области, соответствующие регуляторам с требуемыми свойствами. Типичные требуемые свойства: наличие устойчивость замкнутой системы, заданный показатель колебательности и степень устойчивости описываются положением корней характеристического полинома. При этом все корни должны лежать в определённом подмножестве $\mathcal{D}$ комплексной плоскости. Для задачи стабилизации все корни должны лежать в левой полуплоскости для систем с непрерывном времени, внутри круга единичного радиуса для дискретных систем и т.п. Техника нахождения границ искомой области, впервые предложенная Вышнеградским, и развитая в работах Ю.И. Неймарка [1], получила название метода $\mathcal{D}$-разбиения (также известного как «разбиение плоскости параметров», parameter plane approach [2]). Существует множество обобщений, включая синтез регуляторов для робастных систем, чувствительности регуляторов, случай многомерных параметров и др. [3].

Основа метода состоит в нахождении границы на плоскости двух параметров характеристического полинома (возможно, входящих нелинейно в коэффициенты полинома), путём «обхода» границы множества корней.

В работе предлагается использование метода $\mathcal{D}$-разбиения для несвязных множеств на комплексной плоскости, характеризующего положение корней характеристического полинома. В частности, этот подход позволяет гибко задавать положение групп корней, и учитывать их взаимное положение.

# 2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему с одним входом и одним выходом (SISO), заданную передаточной функцией $G(s) = G_{nom}(s)/G_{den}(s)$ и замкнутую регулятором с передаточной функцией $C(s, k_1, k_2) = C_{nom}(s, k_1, k_2)/C_{den}(s, k_1, k_2)$. Для простоты полагаем, что передаточная функция зависит от двух параметров, $k_1$ и $k_2$, а остальные настраиваемые параметры фиксированы.

Задача корневого синтеза состоит в нахождении таких значений параметров $(k_1, k_2)$, что корни характеристического полинома лежат в заданном множестве $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, множестве локализации корней. В отличие от модального управления точные значения корней результирующего характеристического полинома систем не фиксированы, а ограничены этим множеством.

Данная задача сводится к анализу корней характеристического полинома замкнутой системы в зависимости от параметров регулятора $k_1, k_2$. Характеристический полином степени $n$ записывается с помощью полиномов, формирующих передаточные функции объекта и регулятора.

$$\begin{aligned} P(s, k_1, k_2) &= G_{den}(s)C_{den}(s, k_1, k_2) + G_{nom}(s)C_{nom}(s, k_1, k_2) = \\ &= a_0(k_1, k_2)s^n + a_1(k_1, k_2)s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n(k_1, k_n). \end{aligned}$$

Искомое множество параметров определяется как

$$K_{\mathcal{D}} = \{(k_1, k_2)\colon s_j \in \mathcal{D},\ P(s_j, k_1, k_2) = 0,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

В этой записи $s_j$ — корни полинома, неявно зависящие от параметров регулятора $k_1, k_2$. Если граница множества $\mathcal{D}$ является односвязной кривой без самопересечений, что верно для всех перечисленных случаев, то её границу $\Gamma \doteq \partial\mathcal{D}$ можно параметризовать с помощью скалярного параметра $t$ из интервала $T$ (конечного или бесконечного) как $\Gamma = \{s_\Gamma(t) : t \in T\}$. В дальнейшем полагаем полином $P(s, k_1, k_2)$ степени $n$ заданным, меняется только область локализации корней.

## 2.1. $\mathcal{D}$-разбиение

Классический метод $\mathcal{D}$-разбиения состоит в нахождении искомого множества $K_{\mathcal{D}}$ с помощью построения его *границы* $\partial K_{\mathcal{D}}$. Такое построение можно сделать неявно, зная границу множества $\mathcal{D}$. Основной результат метода состоит в параметрическом описании множества, содержащего границу $\partial K_{\mathcal{D}}$:

$$\partial K_{\mathcal{D}} \subseteq \cup_{t\in T} K_t \cup K_\infty.$$

Вспомогательные множества $K_t = \{(k_1, k_2)\colon P(s_\Gamma(t), k_1, k_2) = 0\}$ параметризованы, по сути, точками $s(t)$ границы множества $\mathcal{D}$. Если коэффициенты $k_1, k_2$ входят в полином аффинным образом, то множества $K_t$ — точки или т.н. особые прямые. В типичном случае их объединение $\cup_{t\in T} K_t$ само является кривой.

Множество $K_\infty = \{(k_1, k_2)\colon a_n(k_1, k_2) = 0\}$ соответствует предельному значению $t \to \pm\infty$, в случае неограниченного интервала $T$. Обычно это особая прямая либо пустое множество, если старший коэффициент не зависит от параметров $k_1, k_2$.

Объединённое множество $\cup_{t\in T} K_t \cup K_\infty$ разбивает плоскость параметров $(k_1, k_2)$ на области $D_i$, $i = 0, \ldots, n$, каждая из которых соответствуем наличию ровно $i$ корней характеристического полинома в множестве $\mathcal{D}$. Эта процедура и называется $\mathcal{D}$-разбиением. Область $D_n$ по определению и есть искомое множество регуляторов: $K_{\mathcal{D}} \equiv D_n$. Несмотря на то, что объединённое множество границ $\cup_{t\in T} K_t \cup K_\infty$ областей $\mathcal{D}$-разбиения не совпадает с границей $\partial K_{\mathcal{D}}$, оно его содержит. Тем самым посредством границы $\Gamma$ выявляется связь между множеством локализации корней $\mathcal{D}$ из комплексного пространства и областью $K_{\mathcal{D}}$ пространства параметров.

Для различения этих пространств здесь и далее термин «области» используется для описания множеств в пространстве параметров $(k_1, k_2)$, а термин «множества» — для описания множеств в комплексной плоскости. В этих терминах $K_{\mathcal{D}}$ это искомая область. Подробнее о применении метода $\mathcal{D}$-разбиения см. обзор [3].

Настоящая работа посвящена случаю «сложного» множества локализации корней $\mathcal{D}$. Под «сложным» здесь понимаем множество, граница которого состоит не из одной, а из двух или более кривых, что включает в себя многосвязные множества и множества с «дырами».

$\mathcal{D}$-разбиение для односвязного множества локализации корней с «дырами» в принципе можно осуществить с помощью классического $\mathcal{D}$-разбиения. Пусть, например, множество $\mathcal{D}$ состоит из $M$ односвязных областей, граница каждого из которых является одной несамопересекающейся кривой $\Gamma_m$. Тогда можно рассмотреть несколько параметризаций $\Gamma_m = \{s_{\Gamma_m}(t)\colon t \in T_m\}$, где каждая из комплекснозначных функций $s_{\Gamma_m}(t)$ определена на своем интервале $T_m$, и описать границу искомого множества как

$$\partial K_{\mathcal{D}} \subseteq \bigcup_{m=1,\ldots,M} (\cup_{t\in T_m} K_{m,t}) \cup K_\infty.$$

Однако после построения множества в правой части включения оказывается, что оно может разбить плоскость параметров на $O((n^2)^M)$ числа областей[1]. Верхняя оценка числа связных областей множества всех полиномов, имеющих корни в $\mathcal{D}$, получена в [4]. Для отсева областей, принадлежащих искомой области $K_{\mathcal{D}}$, требуется взять по одной точке (то есть одной паре коэффициентов регулятора) из каждой области, вычислить корни характеристического полинома и проверить их на принадлежность

[1]Каждое множество $\cup_{t\in T_m} K_{m,t}$, порождаемое частью границы $\Gamma_m$, может разбить плоскость параметров на число областей, по порядку равное $n^2$.

множеству $\mathcal{D}$. Данная процедура становится трудоёмкой с ростом числа связных компонент множества $\mathcal{D}$.

В работе предлагается общий подход, с одной стороны, упрощающий классическую процедуру, а с другой — позволяющий решать более сложные задачи. Подход основывается на вспомогательных подзадачах $\mathcal{D}$-разбиения с *одной* односвязной границей без самопересечений.

### 2.2. Вспомогательные подзадачи

Две базовые задачи позволяют упростить $\mathcal{D}$-разбиение композитных множеств $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$, каждое из которых сформировано из пары более простых множеств $A, B$ и $C, E$.

**Задача 1.** *Для множества $\mathcal{D}^+ = A \cup B$, состоящего из двух несвязных компонент $A$, $B$, конструктивно построить $\mathcal{D}$-разбиение.*

**Задача 2.** *Для множества с «дырой» $\mathcal{D}^- = C \setminus E$ (где $E \subset C$) граница которого состоит из двух частей[2]: всей границы множества $C$ и «внутренней» границы множества $E$, конструктивно построить $\mathcal{D}$-разбиение.*

## 3. Результаты

Сначала решаются задачи 1, 2, а затем сформулирован общий результат, касающийся многосвязного множества с несколькими «дырами».

Чтобы специфицировать $\mathcal{D}$-разбиение относительно конкретного множества локализации корней (скажем, $A$), области $\mathcal{D}$-разбиения будут обозначаться как $D_i^A$. Напомним, что каждая точка этой области соответствует параметрам $(k_1, k_2)$, таким, что ровно $i$ корней полинома $P(s, k_1, k_2)$ лежат в $A$.

Решение вспомогательных подзадач определяется с помощью $\mathcal{D}$-разбиения множеств-компонент $A, B, C, E$ следующим образом.

**Лемма 1** (Решение задачи 1).

$$D_i^{\mathcal{D}^+} = \bigcup_{j=0,\ldots,i} \left( D_j^A \cap D_{i-j}^B \right), \quad i = 0, \ldots, n.$$

**Лемма 2** (Решение задачи 2).

$$D_i^{\mathcal{D}^-} = D_i^C \cap D_0^E, \quad i = 0, \ldots, n.$$

В первом случае перебираются все способы попадания $i$ корней в два множества (а их всего $i+1$), а во втором записано условие нахождения $i$ корней в $C$, при этом в $E$ нет ни одного.

Пусть в общем случае рассматриваемое множество локализации корней $\mathcal{D}$ состоит из $M$ компонент связности $\mathcal{D}_m$ с $K$ «дырами»[3]. С топологической точки зрения это соответствует ненулевому второму числу Бетти, равному $K$ и первому числу Бетти, отличному от 1 ($M$). $\mathcal{D}$-разбиение этого множества можно осуществить, последовательно применяя к исходному множеству $\mathcal{D}$ решение задачи 1 ($M-1$ раз) и задачи 2 ($K$ раз). Итоговый результат можно выразить с использованием вспомогательных множеств напрямую:

[2] Так, что вычитание множества $E$ не «уничтожает» части границы исходного множества $C$.

[3] С тем же свойством, что и в задаче 2, см. предыдущую сноску.

**Теорема 1.** *Области $\mathcal{D}$-разбиения для множества локализации корней $\mathcal{D}$ с $M$ компонентами связности $\mathcal{D}_m$, $m = 1, \ldots, M$, и с $K$ «дырами», задаваемыми множествами $E_k$, $k = 1, \ldots, K$, задаются выражением*

$$D_i^{\mathcal{D}} = \left( \bigcup_{\sum_{m=1}^{M} i_m = i} \left( \cap_{m=1,\ldots,M} D_{i_m}^{\mathcal{D}_m} \right) \right) \bigcap_{k=1,\ldots,K} D_0^{E_k}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Доказательство теоремы по существу следующее. Вторая половина выражения (с пересечением множеств) соответствует задаче 2, то есть исключает попадание корней характеристического полинома в «дыры». Пояснения требует только первая часть в скобках. Она состоит из объединения некоторого числа областей вида $\cap_{m=1,\ldots,M} D_{i_m}^{\mathcal{D}_m}$. Каждая из этих областей соответствует некоторому распределению $i$ корней характеристического полинома среди $M$ связных компонент множества локализации $\mathcal{D}_m$. Всего таких различных распределений $C_{i+M-1}^{M-1}$. Каждая отдельная область $\cap_{m=1,\ldots,M} D_{i_m}^{\mathcal{D}_m}$ соответствует параметрам регулятора $(k_1, k_2)$, осуществляющим это распределение корней.

Следствием теоремы является выражение для искомой области регуляторов

$$\mathcal{K}_{\mathcal{D}} = D_n^{\mathcal{D}} = \left( \bigcup_{\sum_{m=1}^{M} i_m = n} \left( \cap_{m=1,\ldots,M} D_{i_m}^{\mathcal{D}_m} \right) \right) \bigcap_{k=1,\ldots,K} D_0^{E_k}.$$

# 4. Заключение

Показано, что задача синтеза регулятора со сложным множеством локализации корней характеристического полинома может быть сведена к простым подзадачам аналогичного типа. При этом существенно используется способность метода $\mathcal{D}$-разбиения находить параметры регуляторов, обеспечивающих *заданное* число корней полинома в том или ином множестве локализации.

Решение основывается на нахождении пересечений и объединений множеств на плоскости. Этот подход также позволяет находить регуляторы, отвечающие более сложным критериям локализации корней, например, задаче синтеза с дополнительной локализацией нескольких корней и т.п.

Работа была выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-08-00140а).

# Список литературы

1. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
2. Ackermann J. Robust Control: the Parameter Space Approach. London: Springer, 2002.
3. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А. Современное состояние метода $D$-разбиения // Автоматика и телемеханика. 2008. № 12. С. 3-40.
4. Violet G. The Topology of D-Stability // Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2016. P. 4704-4709.