УДК 517.977

К ВОПРОСУ О СТАБИЛИЗАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ

А.С. Фурсов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: fursov@cs.msu.su

И.В. Капалин
МГУ имени М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1
E-mail: ikapalin@cs.msu.ru

Ключевые слова: переключаемая система, векторный вход, система с переменной структурой, стабилизация.

Аннотация: В докладе рассматривается задача стабилизации векторных по входу переключаемых линейных систем, функционирующих в условиях действия ограниченных координатных возмущений при произвольных переключающих сигналах. Для решения этой задачи предлагается алгоритм построения регулятора переменной структуры на основе методов теории одновременной стабилизации.

1. Введение

Настоящий доклад посвящен вопросу стабилизации по состоянию векторных по входу переключаемых линейных систем с произвольным законом переключения. Доклад обобщает результаты, представленные в работе [1], в предположении, что на переключаемую систему в качестве внешнего воздействия оказывает влияние только неизмеряемое координатное возмущение.

Общую постановку задачи сформулируем следующим образом. Рассматривается переключаемая линейная система, векторная относительно входа, и заданная уравнением состояния

(1) $$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma(u + f), \quad \sigma \in \mathfrak{S},$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \to I = \{1, \dots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; $\mathfrak{S}$ — множество переключающих сигналов σ; $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — вектор управляющих входов; $A_\sigma = A \circ \sigma$ — композиция отображения $A : I \to \{A_1, \dots, A_m\}$ ($A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$) и переключающего сигнала σ; $B_\sigma = B \circ \sigma$ — аналогичная композиции для отображения $B : I \to \{B_1, \dots, B_m\}$ ($B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$);

$f(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор внешних ограниченных кусочно-непрерывных координатных возмущений. Считаем, что относительно $f(t)$ известна оценка

$$||f(t)|| \leqslant f_0,\ t \geqslant 0.$$

Далее предполагается, что закон переключения $\sigma(t)$ является неизвестной функцией времени. В этом случае говорят, что переключающий сигнал является неизмеряемым. Переключаемая система (1) понимается как многорежимная динамическая система с законами переключения $\sigma \in \mathfrak{S}$, определяющими промежутки активности каждого режима. В случае системы (1) под режимом понимается динамическая система, определяемая какой-либо парой (A_j, B_j), $j = 1, \dots, m$, т.е.

$$\dot{x} = A_j x + B_j(u + f). \tag{2}$$

При этом, в силу кусочной непрерывности функции $\sigma(t)$, переходы между режимами осуществляются скачкообразно, а движение переключаемой системы в каждый момент времени определяется активным режимом. Будем предполагать, что все матрицы B_j $(j = 1, \dots, m)$ имеют полный ранг.

2. Постановка задачи

Для переключаемой линейной системы вида (1) требуется построить регулятор в форме разрывной обратной связи по состоянию

$$u(x) = (u_1(x), \dots, u_r(x)), \quad u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x), \text{ если } \rho_i(x) > 0, \\ u_i^-(x), \text{ если } \rho_i(x) < 0 \end{cases} \tag{3}$$

($\rho_i(x) = c_i x$, $c_i \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $u_i^+(x)$, $u_i^-(x)$ — подлежащие выбору непрерывные функции), который

1) создает в замкнутой системе

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma(u(x) + f(t)) \tag{4}$$

скользящее движение на пересечении поверхностей $\rho_i(x) = 0$ $(i = 1, \dots, r)$;

2) гарантирует попадание траектории системы (4) на пересечение поверхностей $\rho_i(x) = 0$ $(i = 1, \dots, r)$ из любой точки фазового пространства;

3) обеспечивает экспоненциальную устойчивость скользящего движения системы (4) на пересечении поверхностей $\rho_i(x) = 0$ $(i = 1, \dots, r)$.

Обозначим $\rho(x) = Cx$, где $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $C = (c_1^\top \dots c_r^\top)^\top$. Тогда уравнение $\rho(x) = 0$ задает поверхность, являющуюся пересечением поверхностей $\rho_i(x) = 0$ $(i = 1, \dots, r)$.

Уравнение скользящего движения (в случае его существования) вдоль поверхности $\rho(x) = 0$ для замкнутой системы (4) можно получить, используя метод эквивалентного управления [2].

В работе [1] для поиска регулятора, стабилизирующего переключаемую линейную систему (скалярную по входу) при неизмеряемых переключающих сигналах, было предложено использовать методы теории одновременной стабилизации [4–9]. В частности, была сформулирована теорема, позволяющая строить стабилизирующий регулятор переменной структуры, используя технику линейных матричных неравенств. При этом вопрос о построении такого регулятора для случая переключаемых систем, векторных по входу, остался открытым.

В докладе предложен метод поиска стабилизирующего регулятора переменной структуры для переключаемых линейных векторных по входу систем на основе алгоритмов теории одновременной стабилизации, теории систем с переменной структурой и теории линейных матричных неравенств. Важно отметить, что использование регулятора переменной структуры дает возможность обеспечить инвариантность замкнутой переключаемой системы по отношению к действующим координатным возмущениям, чего невозможно добиться, используя линейные регуляторы.

3. Вывод уравнений скольжения и устойчивость скользящего движения

Построение алгоритма стабилизации системы (1) регулятором (3) начнем с нахождения $(n-r)$ уравнений скольжения и установления зависимости скользящего движения от матрицы C (ранга r), определяющей поверхность скольжения $\rho(x)=0$. Знание этой зависимости необходимо для настройки параметров обратной связи (3), отвечающих за устойчивость скользящего движения.

Можно показать, что система (1) при $u=u_{eq}$ в скользящем движении по поверхности $Cx=0$ описывается уравнением

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_{\rho,\sigma}\bar{x}, \tag{5}$$

где $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_{n-r})$, а $\bar{A}_{\rho,\sigma}$ — матрица, образованная первыми $(n-r)$ строками и столбцами матрицы $A_{\rho,\sigma}$, т.е.

$$\bar{A}_{\rho,\sigma} = A_{\sigma 11} - A_{\sigma 12}\bar{C} - \Delta_{12}(H_{21} - H_{22}\bar{C}).$$

Учитывая найденную зависимость уравнения скользящего движения системы (1) вдоль поверхности $Cx=0$ от коэффициентов матрицы C, рассмотрим следующую задачу: найти такую поверхность $Cx=0$, для которой скользящее движение (5) при любом переключающем сигнале $\sigma\in\mathfrak{S}$ являлось бы экспоненциально устойчивым.

Решение поставленной задачи можно [3] свести к задаче поиска матрицы C, обеспечивающей существование единой квадратичной функции Ляпунова $V(\bar{x})=\bar{x}^\top P\bar{x}$ ($P\succ 0$, $P^\top=P$) для всех возможных режимов ($\sigma(t)\equiv j$, $j=1,\ldots,m$)

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_{\rho,j}\bar{x}, \quad j=1,\ldots,m, \tag{6}$$

переключаемой системы (5).

Пусть $B_{ext}=[B^1\ldots B^m]$ — матрица размера $n\times rm$, составленная из столбцов матриц $B^1,\ldots,B^m$. Далее будем считать, что относительно системы (1) выполнено следующее предположение.

Предположение 1. *Существует такая невырожденная матрица $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и положительные числа d_j^i ($i=1,\ldots,r; j=1,\ldots,m$), что выполнено равенство*

$$MB_{ext} = \begin{pmatrix} O_{n-r,r} & \ldots & O_{n-r,r} \\ diag\,(d_1^i) & \ldots & diag\,(d_m^i) \end{pmatrix} \tag{7}$$

Систему (1), относительно которой выполнено Предположение 1, по аналогии с работой [1], будем называть *p-системой, согласованной по входам.* Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для произвольной переключаемой p-системы, согласованной по входам вида (1) найдется линейное невырожденное преобразование переменных состояния $z = Mx$, приводящее ее к виду*

$$\dot{z} = Q_\sigma z + H_\sigma(u + f), \quad \sigma \in \mathfrak{S}. \tag{8}$$

где

$$H_\sigma = MB_\sigma = \begin{pmatrix} O_{n-r,r} \\ diag\,(d_\sigma^i) \end{pmatrix}, \; i = 1, \ldots, r, \quad Q_\sigma = MA_\sigma M^{-1}.$$

4. Условие существования скользящего режима для переключаемой системы

Пусть система (1) является приведенной p-системой, согласованной по входам. Далее, пусть поверхность $\rho(x) = 0$ ($\rho(x) = Cx$) выбрана так, что скользящее движение (5) переключаемой системы (1) вдоль этой поверхности является устойчивым. Тогда стабилизирующее управление u для системы (1) будем искать в виде

$$u(x) = [\mathrm{diag}\,(\mathrm{sign}\,(\rho_i(x)))](k_\rho + K\mu(x)), \tag{9}$$

где $\mu(x) = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^\top$ — вектор из модулей компонент вектора x, $k_\rho \in \mathbb{R}^{r\times 1}$, $K \in \mathbb{R}^{r\times n}$ — постоянные матрицы обратной связи, $\mathrm{diag}\,(\mathrm{sign}\,(\rho_i(x)))$ — диагональная матрица с элементами $\mathrm{sign}\,(\rho_i(x))$ на диагонали. Вопрос о существовании скользящего движения вдоль поверхности $\rho = 0$ сведем к задаче выбора соответствующих матриц $k_\rho \in \mathbb{R}^{r\times 1}$, $K \in \mathbb{R}^{r\times n}$ управления (9).

Для удобства формулировки теоремы введем некоторые обозначения. Поэлементное сравнение двух матриц A и B будем обозначать как $A \overset{comp}{<} B$, через $\mu(A) = \{|a_{ij}|\}_{i,j=1}^n$ — взятие модуля от каждого элемента матрицы A, $\underset{j=1,\ldots,m}{\nu}(Z_j) = \{\underset{j=1,\ldots,m}{\max} z_{ik}^j\}_{i,k=1}^n$ — матрица размеров $n\times n$, составленная из максимальных по всем $j = 1, \ldots, m$ компонент матриц Z_j в соответствующих позициях.

Теорема 1. *Пусть переключаемая система (1) является приведенной p-системой, согласованной по входам. Тогда управление (9), для которого выполнены условия а)–в):*

а) $\rho(x) = (\rho_1(x), \ldots, \rho_r(x))^\top = Cx$, $C = \begin{pmatrix}\bar{C} & I_r\end{pmatrix}$ и $\bar{C} = YX^{-1}$ (матрицы X и Y являются решениями системы линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} A_{i11}X + XA_{i11}^\top - (A_{i12}Y + Y^\top A_{i12}^\top) \prec 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ X \succ 0, \end{cases}$$

б) $k_\rho = (k_{\rho 1}, \ldots, k_{\rho r})^\top$, где $k_{\rho i} < -f_0$, $i = 1, \ldots, r$;

в) $K \overset{comp}{<} \underset{j=1,..,m}{\nu}((CB_j)^{-1}\mu(CA_j))$,

обеспечивает

— попадание траекторий системы (1), (9) из любого начального состояния за конечное время на поверхность $\rho(x) = 0$;

— существование для переключаемой системы (1), (9) экспоненциально устойчивого скользящего движения вдоль поверхности $\rho(x) = 0$.

Теорема 1, фактически, формулирует достаточное условие стабилизации приведенной p-системы (1) регулятором переменной структуры. Пусть теперь переключаемая p-система (1), согласованная по входам, представлена в общем виде. Тогда достаточное условие ее стабилизации регулятором переменной структуры дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть переключаемая система (1) является приводимой p-системой, согласованной по входам. Пусть линейная невырожденная замена фазовых переменных $z = Mx$, преобразует исходную систему к приведенной форме (8) и управление*

$$u(z) = \mathrm{diag}\,(\mathrm{sign}\,(\rho_i(z)))[k_\rho + K\mu(z)],$$

удовлетворяет теореме 3, являясь, таким образом, стабилизирующим для системы (8). Тогда управление

$$\tilde{u}(x) = u(Mx) = \mathrm{diag}\,(\mathrm{sign}\,(\rho_i(Mx)))[k_\rho + K\mu(Mx)]$$

будет стабилизирующим для исходной системы (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-07-01283, 18-07-01105, 18-07-00540).

Список литературы

1. Фурсов А.С., Капалин И.В. Стабилизация переключаемых линейных систем регулятором переменной структуры // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 8. С. 1109-1120.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
3. Шпилевая О.А., Котов К.Ю. Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) // Автометрия. 2008. Т. 44, № 5. С. 71-87.
4. Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф. К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференц. уравнения, 2015, Т. 51, № 11. С. 1522-1533.
5. Blondel V. Simultaneous stabilization of linear systems. Springer, 1994.
6. Коровин С.К., Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. О некоторых подходах к одновременной стабилизации линейных объектов регулятором заданной структуры // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 4. С. 597-608.
7. Коровин С.К., Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. Об одновременной стабилизации линейных объектов произвольных порядков регулятором заданной структуры // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 2. С. 173-177.
8. Коровин С.К., Фурсов А.С. Одновременная стабилизация: синтез универсального регулятора // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 61-73.
9. Емельянов С.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Одновременная стабилизация линейных динамических объектов регулятором переменной структуры // Автоматика и телемеханика. 2012. № 7. С. 15-24.