

СИНТЕЗ H_∞ РЕГУЛЯТОРОВ ОДНОМЕРНЫХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

В.Н. Честнов

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: vnchest@yandex.ru

Д.В. Шатов

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: dvshatov@gmail.com

Ключевые слова: линейные следящие системы, синтез регуляторов, ограниченные внешние возмущения, ошибка слежения, показатель колебательности, степень устойчивости, время регулирования.

Аннотация: Предлагается метод синтеза регуляторов одномерных следящих систем по заданным или достижимым инженерным критериям: точности, времени регулирования и показателю колебательности на основе H_∞ оптимизации.

1. Введение

Рассматривается задача синтеза одномерных следящих систем по инженерным критериям качества на основе H_∞ подхода. В этом смысле работа продолжает исследования, начатые в работе [1], где рассматривались два инженерных критерия: показатель колебательности и время регулирования. Настоящая работа развивает это направление учетом действия ограниченных полигармонических возмущений. Используется H_∞ подход к такой задаче синтеза.

2. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый и наблюдаемый объект управления:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 f + B_2 u; \\ y = Cx, \end{cases}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния объекта; $u \in R^1$ – управляющее воздействие; $y \in R^1$ – регулируемый выход объекта; $f \in R^1$ – внешнее неизменяемое возмущение. Матрицы объекта A, B, C, D соответствующих размеров известны.

Объект (1) замкнут стабилизирующим динамическим регулятором по выходу:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c \varepsilon; \\ u = C_c x_c + D_c \varepsilon, \end{cases}$$

где $x_c \in R^{n_c}$ – вектор состояния регулятора ($n_c \leq n$); A_c, B_c, C_c, D_c – матрицы чисел, $\varepsilon = g - y$ – измеряемая переменная (сигнал ошибки), $g(t)$ – задающее воздействие.

Внешнее возмущение f и задающее воздействие g предполагаются принадлежащими классу ограниченных полигармонических функций:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(\omega_k^f t + \psi_k^f), \quad g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin(\omega_k^g t + \psi_k^g),$$

где амплитуды $f_k, g_k > 0$, $k = \overline{1, \infty}$, начальные фазы ψ_k^f, ψ_k^g , $k = \overline{1, \infty}$, а также частоты ω_k^f, ω_k^g , $k = \overline{1, \infty}$ сигналов неизвестны. Число гармоник неограничено.

Предполагается, что эти сигналы ограничены в следующем смысле:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \leq f^*, \quad \sum_{k=1}^{\infty} g_k \leq g^*,$$

где $f^*, g^* > 0$ – известные числа.

Рассматриваются следующие инженерные показатели качества слежения:

1) Точность следящей системы (1), (2) оценивается по величине ошибки слежения по истечении времени регулирования t_p :

$$\varepsilon_{st} = \sup_{t \geq t_p} |\varepsilon(t)|.$$

Обычно на практике требуется, чтобы выполнялось неравенство:

$$(3) \quad \varepsilon_{st} \leq \varepsilon^*,$$

где ε^* – заданное положительное число (желаемая ошибка слежения).

2) Время регулирования замкнутой системы (1), (2) можно оценить как

$$(4) \quad t_p \approx 3/\beta,$$

где β – степень устойчивости замкнутой системы – минимальное расстояние от мнимой оси до ближайшего собственного значения матрицы замкнутой системы (1), (2) A_{cl} :

$$(5) \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} A - B_2 D_c C & B_2 C_c \\ -B_c C & A_c \end{bmatrix}.$$

Известно, что такой подход к оценке времени регулирования дает приемлемую с практической точки зрения оценку, если среди собственных значений матрицы A_{cl} нет кратных, ближайших к мнимой оси. Это открывает возможность обеспечить, в первом приближении, желаемое время регулирования t_p^* , используя (4), определив желаемую степень устойчивости замкнутой системы:

$$\beta^* = 3/t_p^*.$$

3) Показатель колебательности замкнутой системы (1), (2) определим соотношением

$$\|T_{yg}\|_{\infty} = \max_{0 < \omega < \infty} |T_{yg}(j\omega)| = M,$$

где $T_{yg}(s) = W(s)/[1 + W(s)]$ – передаточная функция замкнутой системы от задающего сигнала g к выходу объекта y ; $W(s) = W_o(s)W_c(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы, которая определяется по передаточным функциям объекта (1) по управлению и регулятора (2): $W_o(s) = C(sI - A)^{-1}B_2$, $W_c = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$, где I – единичная матрица соответствующего размера.

Для этих инженерных показателей качества сформулируем задачу синтеза регулятора.

Задача 1. Найти матрицы A_c, B_c, C_c, D_c стабилизирующего регулятора (2) такие, чтобы выполнялись следующие целевые условия:

- к точности (3);
- к быстродействию $t_p \leq t_p^*$;
- к показателю колебательности $M \leq \gamma$, где $\gamma > 0$ – заданное число.

3. Решение на основе H_{∞} теории

Используя преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях из уравнений системы (1), (2) получим:

$$(6) \quad y = W_o(s)u + W_f(s)f, \quad u = W_c(s)\varepsilon, \quad \varepsilon = g - y,$$

где $W_f(s) = C(sI - A)^{-1}B_1$ – передаточная функция объекта по внешнему возмущению. Введем взвешенную регулируемую переменную $z_1 = Q^{1/2}y$, где Q – весовой коэффициент, выбираемый исходя из заданных требований к точности (3) на основе [2]. Исходная же регулируемая переменная $z_2 = y$ служит для обеспечения требований к показателю колебательности. Структурная схема соответствующая уравнениям (6) приведена на рис. 1.

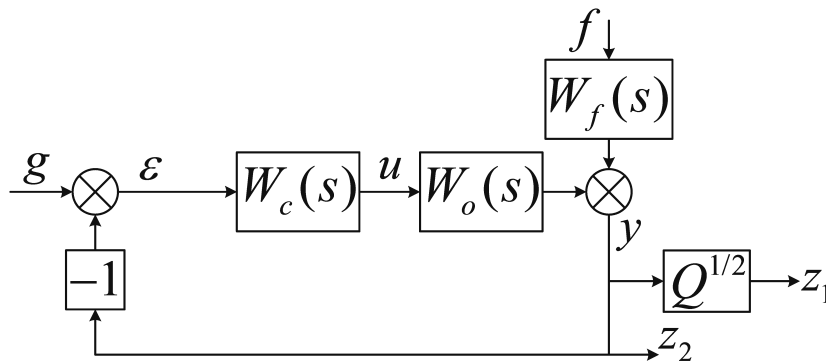


Рис. 1. Структурная схема следящей системы

Объединив входные сигналы f и g в один вектор $w^T = [f \ g]$ и обозначив связывающую их передаточную матрицу замкнутой системы T_{zw} , окончательно запишем:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{1/2}y \\ y \end{bmatrix} = T_{zw}w = \begin{bmatrix} Q^{1/2}T_{yf} & Q^{1/2}T_{yg} \\ T_{yf} & T_{yg} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим следующую смещенную стандартную H_∞ задачу:

$$(7) \quad \|T_{zw}(j\omega - \beta)\|_\infty \leq \gamma,$$

где γ – заданное или минимизируемое число.

Ее решением являются матрицы смещенного регулятора (2) $\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c$ [3]. Искомый регулятор имеет матрицы:

$$A_c = \tilde{A}_c - \beta I, B_c, C_c, D_c.$$

Для перехода к смещенной задаче (7) необходимо сделать замену [3]: $\tilde{A} = A + \beta I$.

Для численного решения задачи (7) запишем уравнения обобщенного объекта [1,3]:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_{o6}x + [B_1 \ 0]w + B_2u, \\ z &= \begin{bmatrix} Q^{1/2}y \\ y \end{bmatrix} = C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \quad \varepsilon = C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned}$$

где $w^T = [f \ g]$ – вектор внешних воздействий, действующих на объект, $z^T = [yQ^{1/2} \ y]$ – регулируемые переменные объекта; $\varepsilon = g - y$ – входной сигнал регулятора. Окончательно, учитывая (1), (2), имеем:

$$\begin{aligned} A_{o6} &= A + \beta I, \quad B_{o6} = [B_1 \ 0 \ B_2], \quad C_{o6} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad D_{o6} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} Q^{1/2}C \\ C \end{bmatrix}; \quad C_2 = -C; \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ D_{21} &= [0 \ 1]; \quad D_{22} = 0. \end{aligned}$$

Численное решение осуществляется на основе широко распространенного в инженерной среде MATLAB-пакета Robust Control Toolbox, где используется техника линейных матричных неравенств (подробнее см. [1,3]).

4. Пример

Рассмотрим следящую систему, изображенную на рис. 1. Передаточные функции объекта по управлению и внешнему возмущению имеют вид [1]:

$$(9) \quad W_o(s) = \frac{10s + 20}{s(s + 1)}; \quad W_f(s) = \frac{25}{s(s + 1)}.$$

Инженерные требования к точности и быстродействию: $\varepsilon^* = 0,05$; $t_p^* = 0,1$.

Параметры синтеза $\beta = 0$, $Q^{1/2} = 10$. Передаточная функция синтезированного регулятора:

$$(10) \quad W_c(s) = \frac{8,71 \cdot 10^7 (s + 1,59)}{(s + 1,33 \cdot 10^6)(s + 2)}$$

На рис. 2 а) изображены результаты моделирования системы (9), (10) при действии

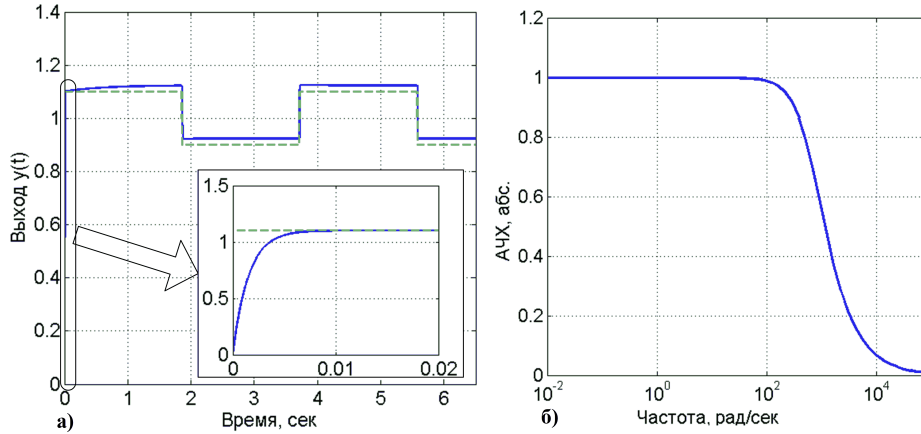


Рис. 2. а) Результаты моделирования: реакция системы (9), (10) на сигналы (11); б) АЧХ замкнутой системы $|T_{yg}(j\omega)|$

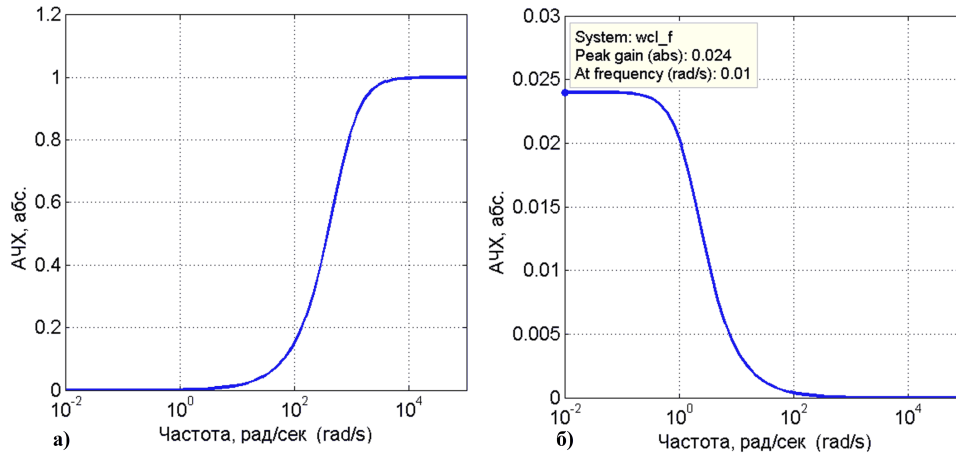


Рис. 3. а) АЧХ передаточной функции чувствительности системы (9), (10); б) АЧХ замкнутой системы по внешнему возмущению T_{yf}

смещенного меандра и ступеньки:

$$(11) \quad g(t) = 1 + 0,1 \operatorname{sign}(\sin[1,69t]); \quad f(t) = 1.$$

Фактический показатель колебательности составил $M = 1,0$. Запасы устойчивости системы (9), (10) по модулю и фазе равны соответственно: $L \rightarrow \infty$, $\phi_3 = 89,9$.

На рис. 3 а) показана АЧХ передаточной функции чувствительности $S(j\omega) = 1/[1 + W(j\omega)]$, которая также позволяет оценить радиус запасов устойчивости: $r = 1/\|S\|_\infty = 1$, подробнее см. [1]. На рис. 3 б) изображена АЧХ передаточной функции замкнутой системы по внешнему возмущению: $T_{yf}(j\omega) = W_f(j\omega)/[1 + W(j\omega)]$, показывающая, что наихудшее возмущение – это ступенька.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-08-01067).

Список литературы

1. Честнов В.Н., Шатов Д.В. Синтез одномерных регуляторов по заданному показателю колебательности: модальный и H_∞ подходы // Проблемы управления. 2019. Принята к печати.
2. Chestnov V.N., Shatov D.V., Multivariable Systems Design of Desired Accuracy Based on LQ and H-Infinity Optimization Procedures // Proc. of the 2018 European Control Conference (ECC-2018). Limassol, Cyprus, 2018. European Control Association (EUCA). 2018. P. 2511-2516.
3. Честнов В.Н. Синтез H_∞ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 170-185.