УДК 519.715

ТЕОРИЯ СКРЫТЫХ КОЛЕБАНИЙ

Н.В. Кузнецов
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 117997, Санкт-Петербург, Университетский пр. 28
Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук
Россия, 199178, Санкт-Петербург, В.О. Большой проспект 61
E-mail: n.v.kuznetsov@spbu.com

Ключевые слова: теория скрытых колебаний, контрпримеры к гипотезам Айзермана и Калмана об абсолютной устойчивости систем управления Лурье, модель Келдыша подавления флаттера, электронные цепи Чуа, система фазовой автоподстройки.

Аннотация: *Доклад посвящен обзору результатов научной школы Геннадия Алексеевича Леонова по теории скрытых колебаний и ее приложениям к классическим проблемам и прикладным задачам.*

1. Введение

23 апреля 2018 г. на 72-ом году жизни скончался декан математико-механического факультета и заведующий кафедрой прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета, заведующий лабораторией информационно-управляющих систем Института проблем машиноведения РАН, член-корреспондент РАН, иностранный член Финской академии наук и литературы, Геннадий Алексеевич Леонов. Он является ярким представителем Петербургской школы *теории управления*, становление которой связано с именами таких выдающихся ученых, как А.И. Лурье (1901-1980), В.А. Якубович (1926-2012), В.И. Зубов (1930-2000). Г.А. Леонов – специалист в области устойчивости, нелинейных колебаний, синхронизации электромеханических и электронных систем. Им создана всемирно известная научная школа, в которой разработаны новые математические методы и решены трудные математические задачи теории управления, важные для развития современных технологий в системах управления, электронных и информационных системах, аэрокосмической технике [1-4].

Одним из направлений работы научной школы Г.А. Леонова в последние годы стало создание *теории скрытых колебаний,* отражающей современный этап развития *теории колебаний* А.А. Андронова. В 2009 году Г.А. Леоновым и Н.В. Кузнецовым было введено новое понятие в теории колебаний – *«скрытые колебания»*, и дана классификация колебаний как *скрытых* или *самовозбуждающихся колебаний*. Современные методы вычислений позволяют эффективно обнаруживать и изучать *самовозбуждающиеся колебания*, в то время как поиск и анализ возникновения *скрытых колебаний* потребовал разработки в научной школе Г.А. Леонова специальных аналитических и численных методов. Теория скрытых колебаний отразила не только трудности решения ряда известных научных проблем, но и оказалась востребованной во многих прикладных задачах. Разработанные в научной школе Г.А. Леонова методы позволили обнаружить скрытые колебания в различных системах автоматического регулирования, механических и физических моделях. Теория скрытых колебаний получила признание научного сообщества как в России, так и за рубежом: первые публикации по этой тематике научной школы Г.А. Леонова в 2016 году вошли в 1% самых высокоцитируемых статей базы Web of Science и стали наиболее цитируемыми статьями журналов International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering [5] и Journal of Computer and Systems Sciences International (переводной версии журнала Известия РАН. Теория и Системы Управления) [6]. Данный доклад посвящен обзору результатов научной школы Г.А. Леонова по *теории скрытых колебаний* и ее приложениям, таким как гипотеза Айзермана и Калмана об абсолютной устойчивости систем Лурье, модель Келдыша подавления флаттера, цепи Чуа, эффект Зоммерфельда застревания частоты, буровые установки, проблема Гильберта-Колмогорова, системы фазовой синхронизации и автоподстройки частоты.

2. Устойчивость и предельные колебания в системах автоматического регулирования. Задачи, инженерный анализ и математическая теория

Необходимость изучения устойчивости и предельных динамических режимов (*аттракторов*) возникает в классических теоретических и практических задачах. Одни из первых таких задач связаны с проектированием автоматических регуляторов (XVIII–XIX вв), которые должны были обеспечить переход динамики объекта управления к рабочему режиму и его устойчивость относительно внешних возмущений. Классическим примером является регулятор Уатта, обеспечивающий поддержание заданной постоянной скорости вращения вала турбины. Работоспособность регуляторов зависит от переходных процессов и предельной динамики в замкнутой системе («объект управления + регулятор»). Примером математической постановки и решения таких задач является опубликованная в 1877 году знаменитая работа И.А. Вышнеградского о регуляторе Уатта [7]. В этой работе для замкнутой динамической модели "машина + регулятор" исследовалась приближенная линейная математической модель без сухого трения и были предложены условия *устойчивости* желаемого рабочего режима, соответствующего состоянию равновесия (*тривиальному аттрактору*) в линейной модели.

Однако, после этой работы оставался открытым важный вопрос строгого доказательства гипотезы Вышнеградского о допустимости проведения линеаризации системы путем отбрасывания сухого трения для определения условий устойчивости рабочего режима и отсутствия нежелательных колебаний. В 1885 году Г. Леотэ впервые показал возможность возникновения в системах регулирования с сухим трением предельных периодических колебаний – *предельных циклов* [8] (также предельные циклы были описаны в работах лорда Релея по теории струн [9], Б. ван дер Поля об электронном генераторе [10] и других). В 1892 году А.М. Ляпунов опубликовал в знаменитой работе "Общая задача об устойчивости движения" обоснование процедуры линеаризации [11], однако, оно было проведено только для гладких нелинейных систем и не позволяло исследовать системы с сухим трением. Вскоре появились публикации, в том числе выдающегося российского ученого Н.Е. Жуковского [12], критиковавшие подход Вышнеградского и ставившие под сомнение его выводы.

Систематическое изучение предельных циклов (*периодических аттракторов*) и критериев их отсутствия в прикладных динамических системах связано с работами научной школы А.А. Андронова. Соединив математические идеи анализа локальной устойчивости А.М. Ляпунова и возникновения колебаний А. Пуанкаре для гладких динамических систем с инженерными потребностями учета разрывных нелинейностей, им была создана математическая *теория колебаний*, объясняющая поведение многих прикладных систем. Эта теория позволила изучать возникновение предельных колебаний, а также получать необходимые и достаточные условия отсутствия колебаний и глобальной устойчивости для систем невысокого порядка. Основы этой теории изложены в знаменитой монографии *«Теория колебаний»* [13], первое издание которой опубликовано в 1937 году. Начиная с 1944 года, А.А. Андронов активно занимался применением теории колебаний к задачам *автоматического регулирования* и организовал знаменитый семинар в Институте автоматики и телемеханики (теперь Институт проблем управления), где им была заложена всемирно известная научная школа по *теории автоматического регулирования* – разделу современной *теории управления* [14, 15]. Первыми результатами А.А. Андронова в этом направлении являются строгий нелокальный анализ нелинейной модели регулятора Уатта с сухим трением и доказательство *достаточности условий Вышнеградского* для отсутствия колебаний и глобальной устойчивости рабочего режима (существование отрезка покоя, притягивающего траектории из любых начальных данных) [16, 17].

Значимость этих результатов была отмечена при избрании А.А. Андронова в 1946 году действительным членом Академии наук СССР по Отделению технических наук, где он стал первым академиком по *теории управления* [18]. В послевоенные годы участниками Андроновского семинара были А.М. Айзерман, В.В. Петров, Я.З. Цыпкин и многие другие ученые, ставшие яркими представители Московской школы теории управления.

Дальнейшее развитие результатов Вышнеградского-Андронова и получение достаточных условий устойчивости и отсутствия колебаний для многомерных систем автоматического регулирования с разрывными характеристиками связано с работами А.Х. Гелига, Г.А. Леонова и их учеников [19-21]. Отметим, что такие задачи до сих пор остаются актуальными для современных регуляторов турбин, как показала недавняя авария на Саяно-Шушенской ГЭС и анализ ее возможных причин в научной школе Г.А. Леонова [22, 23]. Также мотивацией к дальнейшему развитию методов анализа систем регулирования с разрывными характеристиками является важность учета современных моделей *трибологии* [24-26].

В общем случае для практического использования регуляторов важным является выявление в замкнутой системе всех устойчивых стационарных и колебательных режимов, а также областей их притяжения (устойчивость в большом). В работах Л.И. Мандельштама, Н.Д. Папалекси и А.А. Андронова при описании колебательных систем устойчивый стационарный режим характеризуется как *несамовозбужденное состояние*, а переход от ставшего неустойчивым стационарного режима к периодическому колебательному режиму описывается как *самовозбуждение автоколебаний* (предельного цикла) [13, 27]. В 1963 году американским метеорологом Э. Лоренцем было показано, что аналогичное самовозбуждение может приводить не только к периодическим, но и к *хаотическим* предельным режимам (хаотическим аттракторам) в гладких многомерных динамических системах [28]. Для кусочно-линейной системы такой эффект был обнаружен в электронных цепях Чуа в 1984 году [29].

Задачи анализа многомерных систем автоматического регулирования и получения необходимых и достаточных условий глобальной устойчивости, в том числе гарантирующих отсутствие хаотических колебаний, показали необходимость дальнейшего развития теории колебаний А.А. Андронова и создания новых аналитических и численных методов анализа устойчивости и колебаний.

Инженерные понятия *переходного процесса* и *удержания* тесно связаны с возможностью численного анализа предельных колебаний (*аттракторов*). В общем случае колебание в динамической системе может быть вычислено, если начальные данные из его окрестности соответствуют притягиваемым к нему траекториям. Классический инженерный анализ устойчивости и колебаний в системе заключается в определении состояний равновесия, аналитическом определении их локальной устойчивости, а затем численном анализе поведения траекторий с начальными данными в окрестности неустойчивых состояний равновесия. Такой анализ позволяет показать притяжение траекторий из окрестности неустойчивых состояний равновесия к устойчивым состояниям равновесия – тривиальным аттракторам (как, например, притяжение траекторий к тривиальному аттрактору в модели классического маятника), или выявить колебательные аттракторы. Используя свойство самовозбуждения, современные вычислительные средства в настоящее время позволяют легко обнаружить аттракторы в моделях Ван дер Поля, Лоренца и Чуа при помощи численного интегрирования траекторий с начальными данными из окрестности неустойчивых состояний равновесия [5].

Однако в рамках такого подхода открытым оставался вопрос: могут ли существовать в системе аттракторы, к которым не притягиваются траектории из окрестностей состояний равновесия? В 2009 году Г.А. Леоновым и его учеником Н.В. Кузнецовым предложена следующая *классификация аттракторов* динамических систем: *аттрактор называется скрытым, если область его притяжения не соприкасается с неустойчивыми состояниями равновесия, в противном случае аттрактор называется самовозбуждающимся* [5,6,30,31]. Эта классификация отразила экспериментальный подход к анализу возникновения колебаний и численные методы поиска аттракторов, а также стала катализатором открытия новых аттракторов в известных системах. В то время как *самовозбуждающиеся аттракторы* (*self-excited attractors*) могут быть легко обнаружены и визуализированы в численных экспериментах траекториями с начальными данными из окрестностей неустойчивых состояний равновесия, *скрытые аттракторы* (*hidden attractors*) не связаны с состояниями равновесия и их области притяжения “скрыты” в фазовом пространстве системы. Поэтому численный поиск скрытых аттракторов и определение начальных данных для их визуализации в общем случае является нетривиальной задачей. Анализ скрытых аттракторов позволяет определять точные границы глобальной устойчивости состояний равновесия.

Для анализа скрытых колебаний в научной школе Г.А. Леонова были разработаны эффективные аналитические и численные методы, которые позволили обнаружить скрытые колебания в различных прикладных системах. Основные полученные в этом направлении результаты отражены в докторской диссертации Н.В. Кузнецова "*Аналитико-численные методы анализа скрытых колебаний*", защита которой состоялась в Санкт-Петербургском государственном университете в 2016 году (научный консультант: Г.А. Леонов; отзывы: И.М. Буркин, Н.Г. Кузнецов, Е.А. Микрин, В.Г. Пешехонов, Р.М. Юсупов).

Г.А. Леонов, активно работая до последних дней своей жизни, уделял большое внимание разработке теории скрытых колебаний. Последней научной работой Г.А. Леонова стала подготовка в соавторстве с Н.В. Кузнецовым монографии «*Теория скрытых колебаний*» (которую планируется опубликовать в ближайшее время).

Работа поддержана грантом Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки Ведущих научных школ Российской Федерации на 2018-2019 годы (НШ-2858.2018.1)

Список литературы

1. Памяти Геннадия Алексеевича Леонова // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 2. С. 2-7.
2. Kuznetsov N.V., Abramovich S., Fradkov A.L., Chen G. In Memoriam: Gennady Alekseevich Leonov // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2018. Vol. 28, No. 5. Art. num. 1877001.
3. Abramovich S., Kuznetsov N.V., Neittaanmäki P. Obituary: Gennady Alekseevich Leonov (1947-2018) // Open Mathematical Education Notes. 2018. Vol. 8, No. (1). P. 15-21 https://www.potsdam.edu/sites/default/files/omen_8_1_2018_15_21_0.pdf
4. Научная школа Г.А. Леонова. Фильм цикла «Матрица науки». Подготовлен по заказу Комитета по науке и высшей школе Санкт-Петербурга. 2016. https://www.youtube.com/watch?v=X3bla8IYcvk
5. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2013. Vol. 23. Art. num. 1330002.
6. Брагин В.О., Вагайцев В.И, Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи Чуа // Известия РАН. Теория и Системы Управления. 2011. №4, С. 3-36 [English transl.: Bragin V.O., Vagaitsev V.I., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman Conjectures and Chua's Circuits // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2011. Vol. 50, No. 4. P. 511-543]
7. Вышнеградский И.А. О регуляторах прямого действия// Известия СПб технологического института. 1877. Т. 1, С. 21-62
8. Léauté H. Mémoire sur les oscillations à longue périodes dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations // Journal de l'École Polytechnique. 1885. Vol. 55. P. 1-126.
9. Strutt J.W. (the lord Rayleigh). The theory of sound. Vol. 1, Vol. 2. London: Macmillan. 1877, 1878.
10. Van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations // Radio Review. 1920. Vol. 1. P. 701-710.
11. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Типография Зильберберга, 1892.
12. Жуковский Н.Е. Теория регулирования хода машин. Часть 1. М.: Типо-литогр. Т-ва И. Н. Кушнерев и Ко. 1909.
13. Андронов А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.-Л.: ОНТИ. 1937 [English transl.: Andronov A.A., Chaikin S.E. Theory of Oscillations. Princeton University Press. 1949]; Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний / 2-е издание. М.: ФМЛ. 1959 [English transl.:Andronov A.A., Vitt E.A., Khaikin S.E. Theory of Oscillators. Pergamon Press, 1966]
14. Цыпкин Я.З. А.А. Андронов и теория автоматического управления // Автоматика и телемеханика. 1974. Вып. 5. С. 5-10
15. Bissel C. A.A. Andronov and the development of Soviet control engineering // IEEE Control Systems Magazine. 1998. Vol. 18. P. 56-62 [Перевод на русский: Роль А.А. Андронова в развитии автоматического управления в России. Автомат. и телемеханика. 2001. Вып. 6. С. 5-17]
16. Андронов А.А., Майер А.Г. Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей // Доклады АН СССР. 1944. Т. 43, № 2. С. 58-60.

17. Андронов А.А., Майер А.Г. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования // Доклады АН СССР. 1945. Т. 47, № 5. С. 345-348.
18. Академики, избранные Общим Собранием АН СССР 30 ноября 1946 года. Вестник АН СССР. 1947. № 1. С. 83
19. Леонов Г.А. Об устойчивости нелинейных регулируемых систем с неединственным положением равновесия // Автоматика и телемеханика. 1971. №. 10. С. 23-28.
20. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука. 1978 [English transl.: Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. Singapore: World Scientific, 2004].
21. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Киселева М.А., Мокаев Р.Н. Глобальные задачи дифференциальных включений: проблемы Калмана и Вышнеградского, цепи Чуа // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 4. С. 1-52 [English transl.: Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kiseleva M.A., Mokaev R.N. Global problems for differential inclusions. Kalman and Vyshnegradskii problems and Chua circuits. Differential Equations. 2017. Vol. 53, No. 13. P. 1671-1702].
22. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Соловьева Е.П. Математическая модель гидротурбины, генератора и системы управления Саяно-Шушенской ГЭС // Доклады Академии Наук. 2016. Т. 466. С. 654-659
23. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Solovyeva E.P. A simple dynamical model of hydropower plant: stability and oscillations // IFAC-PapersOnline. 2015. Vol. 48, No. 11. P. 656-661.
24. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О некоторых задачах динамики твердого тела с сухим трением. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-2. С. 133-134
25. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука. 2001.
26. Колесников В.И., Иваночкин П.Г., Челохьян А.В., Луговой Е.А. Трение и изнашивание узлов машин и механизмов. Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет путей сообщения. 2000.
27. Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д. О явлениях резонанса n-го рода // Журн. техн. физики. 1932. Т. 2. С. 775-811 [Л. И. Мандельштам. Полное собрание трудов. Том 2. М.: АН СССР. 1947].
28. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20. P. 130-141.
29. Matsumoto T.A. Chaotic Attractor from Chua’s Circuit // IEEE Transactions on Circuits & Systems. 1984. Vol. 31, No. 12. P. 1055-1058.
30. Kuznetsov N.V. Hidden attractors in fundamental problems and engineering models. A short survey // Lecture Notes in Electrical Engineering. 2016. Vol. 371. P. 13-25 (Plenary lecture, International Conference on Advanced Engineering – Theory and Applications).
31. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion // European Physical Journal Special Topics. 2015. Vol. 224. P. 1421-1458.