

УДК 519.715

# СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

**Н.В. Кузнецов**

*Санкт-Петербургский государственный университет*  
Россия, 117997, Санкт-Петербург, Университетский пр. 28  
*Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук*  
Россия, 199178, Санкт-Петербург, В.О. Большой проспект 61  
E-mail: [nkuznetsov239@gmail.com](mailto:nkuznetsov239@gmail.com)

**М.В. Юлдашев**

*Санкт-Петербургский государственный университет*  
Россия, 117997, Санкт-Петербург, Университетский пр. 28  
[maratyv@gmail.com](mailto:maratyv@gmail.com)

**Р.В. Юлдашев**

*Санкт-Петербургский государственный университет*  
Россия, 117997, Санкт-Петербург, Университетский пр. 28  
[rentayv@gmail.com](mailto:rentayv@gmail.com)

**Ключевые слова:** фазовая автоподстройка частоты, PLL, диапазон удержания, диапазон захвата.

**Аннотация:** Доклад посвящен обзору результатов, полученных Геннадием Алексеевичем Леоновым и его учениками в области систем фазовой автоподстройки частоты (Phase-locked loop, PLL). Схемы PLL были предложены в начале прошлого века для подстройки частоты управляемого генератора колебаний к частоте входного сигнала в радио и ТВ, а в дальнейшем получили большое распространение в компьютерных архитектурах, системах цифровой связи и спутниковой навигации. В докладе рассматриваются подходы к линейному и нелинейному анализу этих систем, компьютерное моделирование и границы его применимости.

## 1. Введение

Схемы фазовой автоподстройки (ФАП, Phase-Locked Loop) были предложены в начале прошлого века для подстройки частоты управляемого генератора колебаний к частоте входного сигнала. Первые схемы ФАП использовались в телевидении, радиотехнике и радиолокации. В настоящее время различные схемы ФАП получили широкое распространение в современном телекоммуникационном оборудовании, распределенных компьютерных архитектурах и глобальных навигационных системах (GPS, ГЛОНАСС) [1-2].

Схемы ФАП являются нелинейными системами автоматического регулирования, реализующими принцип master-slave синхронизации фаз периодических электрических сигналов. Принцип работы ФАП основан на использовании фазового детектора – нелинейного элемента, позволяющего оценить разность фаз сигналов, которая трансформируется в управляющее воздействие на частоту подстраиваемого генератора для достижения синхронизации колебаний. Основными характеристиками работы ФАП являются

ся диапазоны разностей частот, для которых происходит подстройка генераторов с требуемыми свойствами переходных процессов (полоса удержания, полоса захвата, полоса быстрого захвата без проскальзывания циклов) и помехоустойчивость.

Для описания принципов работы ФАП требуется переход из пространства сигналов в фазово-частотное пространство и обратно. Так, для проведения строгого математического анализа ФАП требуется не только построение адекватных нелинейных математических моделей ФАП в пространстве сигналов и фазово-частотном пространстве, но и обоснование перехода между этими моделями, а также проведение нелинейного анализа. Однако в современной инженерной литературе основными инструментами анализа и синтеза ФАП являются использование упрощенных линейных моделей, применение методов линейного анализа, эмпирических правил и моделирования. Это было отмечено известным экспертом по ФАП Д. Абрамовичем на пленарном докладе American Control Conference 2002 [3]. Следует отметить, что численное моделирование ФАП является, как правило, очень трудоемким из-за нелинейности фазового детектора и высоких частот рассматриваемых сигналов. Шаг моделирования, который должен быть достаточно малым, чтобы отчетливо наблюдать динамику фазового детектора, делает трудным наблюдение за динамикой всей системы.

## **2. Истрия развития методов анализа и синтеза систем фазовой автоподстройки**

Возможность нелинейного анализа простейших математических моделей ФАП была впервые показана в работе 1933 года Ф. Трикоми [4], в которой исследовалось качественное поведение двумерных систем маятникового типа. Эти идеи затем развивались в работах А.А. Андропова и его последователей (М.В. Капранов, Н.А. Губарь, Б.И. Шахтарин, Л.Н. Белюстина, В.Д. Шалфеев и другие). В 50-е годы появились первые работы Ю.Н. Бакаева по применению прямого метода Ляпунова для анализа простейших моделей ФАП и исследования В.И. Тихонова по оценке влияния шумов на работу ФАП.

В 1966 году были опубликованы основополагающие фундаментальные монографии, содержащие накопленный американскими и советскими инженерами всесторонний опыт по анализу и синтезу систем ФАП (Ф. Гарднер, А. Витерби, В.В. Шахгильдян и А.А. Ляховкин [5-7]). При этом основные монографии американских авторов были переведены на русский, а в США ученые следили за работами советской школы по заказу Национального управления по аэронавтике и исследованию космического пространства (NASA) [6]. В дальнейшем основные усилия на западе были направлены на развитие новых технологий на основе ФАП, а в СССР – на изучение строгих методов анализа и создание общей математической теории для нелинейного анализа ФАП. Однако эти направления исследований редко соприкасались, так, некоторые новые схемы и постановки задач остались незамеченными советскими учеными, а многие важные результаты строгого нелинейного анализа остались неизвестными на западе [5], [8].

### 3. Развитие математической теории фазовой синхронизации в научной школе Г.А. Леонова

Первые работы Г.А. Леонова и его учеников в 70-е годы прошлого века были посвящены разработке общих подходов к нелинейному анализу классических математических моделей ФАП в фазово-частотном пространстве. Модели описывались дифференциальными и разностными уравнениями с периодическими, относительно разности фаз, нелинейностями. В этих работах были преодолены трудности, связанные с обобщением классических результатов теории устойчивости на системы с цилиндрическим фазовым пространством и разрывными нелинейностями. Так, например, классические критерии глобальной устойчивости Барбашина-Красовского и принцип Ла-Салля требуют неограниченного возрастания функций ляпуновского типа по всем координатам, в то время как в цилиндрическом фазовом пространстве рассматриваются изменение фазы на периоде и периодические функции Ляпунова (*модификация прямого метода Ляпунова с построением периодических функций ляпуновского типа*). Для анализа ограниченности траекторий моделей ФАП был разработан *метод положительно инвариантных конусных сеток (аналог кругового критерия)*. Дальнейшим развитием этого метода стал *метод сведения*, в котором выполнение некоторого частотного условия сводит задачу анализа глобальной устойчивости многомерной системы к анализу поведения системы второго порядка. В 1986 году за эти достижения Г.А. Леонов (в составе коллектива исследователей под руководством В.В. Шахгильдяна) был удостоен Государственной Премии СССР. Основные результаты были представлены в монографиях [9-13].

В последнее десятилетие двадцатого века началось активное внедрение систем ФАП в новые информационные технологии. Достаточно отметить, что синтезаторы частот, имеющиеся в каждом современном компьютере, имеют в своей конструкции такие системы синхронизации. Различные модификации этих систем обеспечивают синхронизацию в суперкомпьютерах и используются для передачи цифровых данных в спутниковых системах глобальной навигации ГЛОНАСС и GPS. Для этих новых систем фазовой синхронизации потребовалось создание новых математических методов анализа и синтеза математических моделей ФАП и уточнения границ их применимости. Анализ современной инженерной практики проектирования ФАП и современной литературы показал необходимость разработки более полных математических моделей ФАП, уточнения и адаптации основных используемых определений и дальнейшего развития строгого математического аппарата для нелинейного анализа ФАП [5].

В 2000-х годах Г.А. Леоновым развивались специальные методы теории усреднения [14], позволяющие проводить вычисления характеристик фазовых детекторов и синтезировать новые модели ФАП в фазово-частотном пространстве. Следует отметить, что нелинейная характеристика фазового детектора в фазово-частотном пространстве меняется в зависимости от формы рассматриваемых сигналов (синусоидальные, импульсные, пилообразные и т.д.). Основные результаты в этом направлении были опубликованы в [15-19].

В последние годы научная школа Г.А. Леонова, с целью заполнить пробелы между современной инженерной практикой анализа и синтеза ФАП и методами математической теории фазовой синхронизации (сформулированными на языке классической теории управления и теории динамических систем), активно сотрудничала [20-22] с известными зарубежными инженерами. Среди них были Р. Бест (Roland Best) – инженер из Швейцарии, основатель компании Best Engineering, автор бестселлера по ФАП, выдержавшего 6 переизданий; а также Д. Бианчи (Giovanni Bianchi) – инженер компании Advantest Europe GmbH, автор серии монографий по моделированию ФАП). В рамках

этого сотрудничества были даны строгие определения основных инженерных характеристик динамики ФАП, в том числе решена задача известного американского инженера Ф. Гарднера об определении полосы быстрого захвата без проскальзывания [23, 24]. Также были синтезированы более полные математические модели ФАП и показаны границы их применимости, а также границы применимости моделирования ФАП в специализированных инженерных пакетах Matlab Simulink и SPICE [25, 26]. Основные полученные здесь результаты были представлены в обзорах ведущих инженерных журналов: IEEE Transactions on Circuits and Systems [24] и IFAC Annual Reviews in Control [20], а также в статьях [27, 28].

## 4. Заключение

В докладе представлен обзор работ научной школы Г.А. Леонова по развитию методов синтеза адекватных математических моделей систем фазовой автоподстройки и их нелинейного анализа.

Работа поддержана грантом Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки Ведущих научных школ Российской Федерации на 2018-2019 годы (НШ-2858.2018.1)

## Список литературы

1. Kaplan E.D., Hegarty C.J. Understanding GPS: Principles and Applications. Artech House, 2006.
2. Best R.E. Phase-Lock Loops: Design, Simulation and Application. 2003.
3. Abramovitch D. Phase-locked loops: A control centric tutorial // Proceedings of the American Control Conference. 2002. Vol. 1, P. 1-15.
4. Tricomi F.. Integrazione di differenziale presentasi in electrotechnica.1933. Vol. 2, No. 2.
5. Gardner F. Phaselock techniques. NY: John Wiley & Sons, 1966.
6. Viterbi A. Principles of coherent communications. NY: McGraw-Hill, 1966.
7. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Фазовая автоподстройка частоты. М.: Связь. 1966.
8. Lindsey W., Tausworthe R. A bibliography of the theory and application of the phase-lock principle. NASA Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, JPL Tech. Rep. 1973.
9. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2013. Vol. 23. Art. no. 1330002.
10. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62. P. 2454-2464.
11. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
12. Leonov G.A., Reitmann V., Smirnova V.B. Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems. Stuttgart-Leipzig: Trubner, 1992.
13. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops. Cambridge Scientific Publisher, 2014.
14. Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложение // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 47-85.
15. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Analytical method for computation of phase-detector characteristic // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2012. Vol. 59. № 10. P.633-637.
16. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Вычисление характеристика фазового детектора для схемы Костаса с квадратурной фазовой манипуляцией // Доклады академии наук. 2016. Т. 468, № 6. С. 624-629.

17. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Характеристика фазового детектора классической системы фазовой автоподстройки частоты // Доклады академии наук. 2015. Т. 461, № 2. С. 151-154.
18. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Дифференциальные уравнения схемы Костаса // Доклады Академии Наук. Сер. Математика. 2012. Т. 446, № 2. С. 149-154.
19. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Seledzhi S.M., Yuldahsev M.V., Yuldashev R.V. Elegant analytic computation of phase detector characteristic for non-sinusoidal signals // IFAC-PapersOnline. 2015. Vol. 48, No. 11. P. 960-963.
20. Best R.E., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Tutorial on dynamic analysis of the Costas loop // IFAC Annual Reviews in Control. 2016. Vol. 42. P. 27-49.
21. Best R.E., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Leonov G.A., Yuldahsev M.V., Yuldashev R.V. A short survey on nonlinear models of the classic Costas loop: rigorous derivation and limitations of the classic analysis // 2015 American Control Conference. P. 1296-1302.
22. Best R.E., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Simulation of analog Costas loop circuits // International Journal of Automation and Computing. 2014. Vol. 11, No. 6. P. 571-579.
23. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldahsev M.V., Yuldashev R.V. Rigorous mathematical definitions of the hold-in and pull-in ranges for phase-locked loops // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, No. 11. P. 710-713.
24. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62. P. 2454-2464.
25. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Hidden attractors in dynamical models of phase-locked loop circuits: limitations of simulation in MATLAB and SPICE // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 51. P. 39-49.
26. Bianchi G., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Limitations of PLL simulation: hidden oscillations in MATLAB and SPICE // IEEE 2015 7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2015. P. 79-84.
27. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Nonlinear dynamical model of Costas loop and an approach to the analysis of its stability in the large // Signal Processing. 2015. Vol. 108. P. 124-135.
28. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Юлдашев Р.В., Юлдашев М.В. Математические модели схемы Костаса, Доклады академии наук. 2015. Т. 464, № 6. С. 660-664.