УДК 681.51

# О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ БЕЗ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

**А.С. Андреев**

*Ульяновский государственный университет*

Россия, 432017, Ульяновск, Л. Толстого ул., 42

E-mail: asa5208@mail.ru

**Ключевые слова:** механическая система, дискретное управление, устойчивость, стабилизация.

**Аннотация:** В докладе исследуется задача о стабилизации движений голономных механических систем посредством релейного ступенчатого управления без измерения скоростей. Задача решается на основе развития метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости интегро-дифференциальных и дискретных уравнений типа Вольтерра. Представлено решение задачи о стабилизации установившихся движений. Обсуждается развитие полученного решения в задаче о стабилизации программных движений систем.

## 1. Введение

В соответствии с традиционными методами управления линейными системами в решении задач о стабилизации движений управляемых механических систем получили распространение ПД- и ПИД-регуляторы. Применение ПД-регуляторов для исследования стабилизации установившихся движений в нелинейной постановке в достаточной степени можно отнести к определению устойчивости в зависимости от структуры сил. Конструктивное решение задачи о стабилизации неустановившегося движения механической системы с ПД-регулятором остается достаточно открытой проблемой.

Многочисленные исследования посвящены проблеме применения ПИД-регуляторов, имеющих определенные преимущества по сравнению с ПД-регуляторами [10]. Определенный анализ известных работ в этой области имеется в публикации [1].

Применение нелинейных ПИ-регуляторов в задаче о стабилизации заданного положения и заданного стационарного движения голономной механической системы при допущении явной зависимости сил от времени впервые обосновано в работах [1,6,7]. Важными факторами их преимущества являются ограниченность и обеспечение стабилизации без измерения скоростей. Заметим, что иной подход к решению задачи об управлении без измерения скоростей основан на применении фильтра по координатам с получением оценки скоростей в шарнирах и их интервальных значений [3, 4, 9].

В настоящей статье представлены результаты, являющиеся продолжением работ из [1, 5–8].

## 2. Формулировка задачи

Пусть имеется управляемая механическая система с голономными связями, описываемая уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U, \tag{1}$$

где $q \in R^n$ – вектор обобщенных координат, $T = \dot q' A(q)\dot q/2$ – кинетическая энергия системы, $A(q) \in R^{n\times n}$, $A(q) = (a_{jk}(q))$ – соответствующая инерционная матрица, $Q$ и $U$ – соответствующие обобщенные векторы неуправляемых и управляемых сил, штрихом обозначена операция транспонирования, $\|q\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2}$ – евклидова векторная норма.

Рассмотрим задачу о стабилизации программной позиции системы (1), за которую, без ограничения общности, можем принять положение

$$\dot q = q = 0 \tag{2}$$

Разложим обобщенную силу $Q$:

$$\begin{array}{l} Q = Q_{(0)} + Q_{(1)} + Q_{(2)}, \\ Q_{(0)} = Q(t,0,0), \quad Q_{(1)} = Q(t,q,\dot q) - Q(t,q,0), \\ Q_{(2)} = Q(t,q,0) - Q(t,0,0). \end{array}$$

Силу $Q_{(1)} = Q_{(1)}(t,q,\dot q)$ можно определить как действие совокупности диссипативно-ускоряющих сил, а силу $Q_{(2)} = Q_{(2)}(t,q)$ – как действие потенциальных и неконсервативных сил.

Будем полагать, что все составляющие системы (1) определены, непрерывны и удовлетворяют условиям предкомпактности в области $R^+ \times R^{2n}$.

Допустим, что обобщенные координаты могут быть разделены

$$\begin{array}{l} q = (q^{(1)}, q^{(2)})', \quad q^{(1)} = (q_1, q_2, \ldots, q_k)', \quad q^{(2)} = (q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n)' \\ (1 \leqslant k \leqslant n). \end{array}$$

Положим, что сила $Q_{(1)}$ представляет собой действие гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией, возможно, достаточно малой, по $\dot q^{(1)}$, $Q'_{(1)}\dot q \leqslant -\gamma\|\dot q^{(1)}(t)\|^2$, $\gamma = const > 0$.

Положим также возможным измерение всех или части координат, на основании которого составляется управление $U$ в виде $U = (U_{(1)}, U_{(2)})'$:

$$\begin{array}{l} U_{(1)} + Q_{(01)} + Q_{(21)}(t,q) = -\Pi_{q^{(1)}}(t,q) - H_{q^{(1)}}(\tilde q^{(1)}), \\ \tilde q^{(1)}(t) = q^{(1)}(kT), kT \leqslant t < (k+1)T, k = 0,1,2,\ldots \\ U_{(2)} + Q_{(02)} + Q_{(22)}(t,q) = -\Pi_{q^{(2)}}(t,q) - \\ -f_{q^{(2)}}(q^{(2)})' \int\limits_0^t P(t,\nu)(f(q^{(2)}(t)) - f(q^{(2)}(\nu)))d\nu, \end{array} \tag{3}$$

где потенциальная функция $\Pi = \Pi(t,q)$ ($\Pi \in C^1([0,+\infty) \times R^n \to R)$, $\Pi(t,0) \equiv 0$) является невозрастающей по времени, $H(0) = 0$, $\|H_{q^{(1)}q^{(2)}}(q^{(1)})\| \leqslant h_0 = const$, функция $f = f(q)$ ($f \in C^1(R^n \to R^n)$) имеет конечное число прообразов в ограниченной области $\{q \in R^n : \|q\| \leqslant H_1 < +\infty\}$, или уравнение $f(q) = c$ ($c = const$) имеет конечное число решений в этой области; $f_q = \partial f/\partial q$, симметричная матрица $P = P(t,\nu)$ ($P \in C^1(S \to R^{(n-k)\times(n-k)})$) и ее производная $\partial P(t,\nu)/\partial t$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1(\nu - t)\|x\|^2 \leqslant x'P(t,\nu)x \leqslant \alpha_2(\nu - t)\|x\|^2,\\
&x'(\partial P(t,\nu)/\partial t)x \leqslant -\alpha_3(\nu - t)\|x\|^2 \quad \forall x \in R^{n-k},\\
&\alpha_i(s) > 0\, \forall s < 0,\ \alpha_i(0) = 0,\ \int\limits_{-\infty}^{0} \alpha_i(\nu)d\nu < +\infty,\ i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

$T > 0$ – шаг дискретизации, $T < \gamma/(2h_0)$.

## 3. Решение задачи

Положим

$$
\|\Pi_{q^{(2)}}(t,q)\| + \|\Pi_{q^{(1)}}(t,q) + H_{q^{(1)}}(q^{(1)})\| \geqslant \Pi_0(q) \geqslant 0.
$$

На основании теоремы из [2] имеем следующие результаты.

**Утверждение 1.** *Допустим, что множество* $\{\Pi_{(0)}(q) = 0\} \cap \{\|q\| \leqslant H_1 < H\}$ *состоит из конечного числа точек. Тогда под действием управления (3) каждое ограниченное движение системы (1) неограниченно приближается к одному из положений равновесия* $\dot q = 0$, $q = q_0 = const$, *отвечающему равенству* $\Pi_{(0)}(q_0) = 0$.

**Утверждение 2.** *Пусть управление (3) таково, что имеют место соотношения:*

*1)* $a_1(\|q\|) \leqslant \Pi(t,q) \leqslant a_2(\|q\|)$;

*2)* $\|\partial\Pi(t,q)/\partial q\| \geqslant \Pi_0(q) \geqslant 0$, $\Pi_0(q) = 0 \Longleftrightarrow q = 0$.

*Тогда положение (2) равномерно асимптотически устойчиво.*

## 4. Заключение

В работе представлено решение задачи о стабилизации заданного положения голономной механической системы. Структура стабилизирующего управления имеет две составляющие: дискретную с учетом действия диссипативных сил (даже достаточно малых) и непрерывную по координатам при отсутствии диссипации. Аналогичным образом решается задача о стабилизации установившихся движений голономной механической системы с циклическими координатами. Определенным образом результаты могут быть распространены и для задачи о стабилизации произвольных программных движений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-41-730022р-а) и Министерства науки и высшего образования РФ (9.5994.2017/БЧ).

# Список литературы


1. Андреев А.С., Перегудова О.А. Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голонмной механической систeмамы // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 156-186.
2. Андреев А.С., Перегудова О.А. О методе функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 260-272.
3. Бурков И.В. Стабилизация натуральной механической системы без измерения её скоростей с приложением к управлению твёрдым телом // ПММ. 1998. Т. 62, Вып. 6. С. 923–933.
4. Перегудова О.А., Макаров Д.С. Стабилизация программного движения манипуляционных роботов на основе измерения координат звеньев // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 4. С. 46–51.
5. Andreev A.S. On Motion Stabilization of a Mechanical System with Cyclic Coordinates // Proceedings of 2018 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"(Pyatnitskiy's Conference) (STAB 2018). IEEE.
6. Andreev A.S., Peregudova O.A. Stabilization of the preset motions of a holonomic mechanical system without velocity measurement // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. Vol. 81, No. 2. P. 95-105.
7. Andreev A., Peregudova O. Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems // Systems Science and Control Engineering. 2018. Vol. 6, No. 1. P. 12-19
8. Andreev A.S., Peregudova O.A. On the Stability and Stabilization Problems of Volterra Integral-Differential Equations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14, No. 3. P. 387–407.
9. Berghuis H., Nijmeijer H. A passivity approach to controller-observer design for robots // IEEE Trans. Robotics Autom. 1993. Vol. 9, No. 6. P. 740–754.
10. Loria A., Lefeber E., Nijmeijer H. Global asymptotic stability of robot manipulators with linear PID and PI2D control // Stability Control: Theory Appl. 2000. Vol. 3, No. 2. P. 138–149.