УДК 519.71

КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ РАВНОВЕСИЯ

И.Н. Барабанов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: ivbar@ipu.ru

В.Н. Тхай
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: tkhai@ipu.ru

Ключевые слова: нелинейная связанная система, равновесие, малое управление, возмущение, резонанс, колебание, устойчивость.

Аннотация: Рассматривается связанная система в окрестности равновесия. Предполагается, что матрица линейной системы имеет чисто мнимые собственные значения, и отсутствуют внутренние резонансы до 4-го порядка включительно. Исследуются колебания при действии на систему малых гладких периодических управлений. Находятся изолированные периодические решения, в терминах малого параметра оцениваются амплитуды колебаний.

1. Введение

В работе [1] введено понятие модели, содержащей связанные подсистемы (МССП). Модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которой подсистемы — системы автономных ОДУ. Связь между подсистемами задается параметром ε; при $\varepsilon = 0$ модель распадается на независимые подсистемы. Таких параметров в МССП может быть один или несколько. Параметры отражают иерархичность подсистем в МССП. Размерность каждой подсистемы в МССП в общем случае индивидуальная, а сама подсистема может быть линейной или нелинейной. В случае малых значений ε получим модель, содержащую слабо связанные подсистемы.

Колебания, бифуркации, устойчивость, стабилизация изучались ранее авторами для слабо связанных МССП; результаты публиковались в журнале АиТ.

В данной работе изучается связанная система в окрестности равновесия, причем рассматриваются конечные связи. Предполагается, что в системе двух связанных нелинейных осцилляторов отсутствуют внутренние резонансы до четвертого порядка включительно, и система подверждена действию малого гладкого периодического управления. Находятся условия существования резонансных колебаний.

2. Резонансное колебание системы

Рассмотрим нелинейную автономную систему четвертого порядка в окрестности положения равновесия. Предположим, что характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_s$, $s = 1, 2$. Тогда в линейном приближении система распадается на независимые осцилляторы. При учете нелинейных членов система становится связанной, причем в общем случае связи будут сильными, т.е. параметр ε принимает конечные значения. Подобная система, к примеру, возникает в [2] в окрестности равновесий связанных пружиной маятников.

Структура нелинейных членов в системе существенно зависит от наличия или отсутствия внутреннего резананса, т.е. целочисленных сооотношений между частотами линейной системы:

$$\lambda_1 + k\lambda_2 = 0, \quad k \in \mathrm{N}.$$

Анализ системы обычно проводится с учетом членов не выше третьего порядка малости по переменным, поэтому выделяются внутренние резонансы низших порядков (1:1, 1:2, 1:3) и резонансы порядка выше четвертого. Соответственно, отдельно изучаются случаи резонансов 1:1, 1:2, 1:3, а также случай отсутствия резонансов до 4-го порядка влючительно, рассматриваемый в настоящей работе.

Для автономной системы известна теорема Ляпунова о центре (существование однопараметрических ляпуновских семейств периодических решений систем, допускающих знакоопределенный интеграл [3, гл.VII]). Результат распространялся на резонансные случаи и другие системы (см. [4–6]). Вопрос об изолированных колебаниях решался коррекцией автономной модели — системы Ляпунова, и переходом к периодической системе [3, гл.VIII]. Сама коррекция проводилась малым управлением, поэтому скорректированная модель изучалась в рамках теории возмущений.

Предположим, что на рассматриваемую автономную систему действуют 2π-периодические по времени t малые по ε возмущения. Воспользуемся уравнениями в комплексно-сопряженных переменных и приведем их к нормальной форме до третьего порядка включительно. Тогда получим

$$\begin{aligned}
&\dot z_1 = \lambda_1 z_1 + (C_{11}|z_1|^2 + C_{12}|z_2|^2)z_1 + Z_1(z,\bar z) + \mu\Psi_1(\mu, z, \bar z, t),\\
(1)\qquad &\dot z_2 = \lambda_2 z_2 + (C_{21}|z_1|^2 + C_{22}|z_2|^2)z_2 + Z_2(z,\bar z) + \mu\Psi_2(\mu, z, \bar z, t),\\
&\lambda_1 = i\omega_1, \quad \lambda_2 = -i\omega_2, \quad \omega_{1,2} > 0, \quad Z_1 = O(|z|^4), \quad Z_2 = O(|z|^4),
\end{aligned}$$

где $\omega_{1,2}$ — частоты, μ — малый параметр, C_s, C_{sj} — комплексные постоянные; черта наверху означает сопряжение; группа уравнений для $\bar z_1, \bar z_2$ опущена.

В случае, когда в системе (1) коэффициенты $C_{12} \sim \varepsilon, C_{21} \sim \varepsilon$, получается слабосвязанная периодическая система с двумя параметрами μ и ε.

Пусть ни одна из частот не совпадает с натуральным числом. Тогда система (1) по теореме Пуанкаре [3, с. 378] имеет единственное периодическое решение с амплитудой $O(\mu)$. Ниже рассматривается случай, когда одно (ω_1) или оба числа $\omega_{1,2}$ — целые.

Пусть $\omega_1 = p$, $p \in N$, а ω_2 — не целое. Для системы Ляпунова этот случай хорошо изучен [3, гл.VIII]: при малых μ рождаются резонансные колебания амплитуды $O(\mu^{1/3})$.

В системе (1) выполним преобразование $z_1 = w_1 e^{ipt}$, $z_2 = w_2$ и запишем уравнения в действительных переменных x_s, y_s $(s = 1, 2)$, выделяя действительные и мнимые части переменных w_1, w_2. Получим

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + X_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + \mu F_1(\mu, x_1, y_1, x_2, y_2, t),\\
\dot{y}_1 &= g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + Y_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + \mu G_1(\mu, x_1, y_1, x_2, y_2, t),\\
\dot{x}_2 &= \omega_2 y_2 + f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + X_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + \mu \Xi_2(\mu, x_1, y_1, x_2, y_2, t),\\
\dot{y}_2 &= -\omega_2 x_2 + g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + Y_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + \mu H_2(\mu, x_1, y_1, x_2, y_2, t),
\end{aligned}
$$

где a_{sj}, b_{sj} — действительные и мнимые части чисел C_{sj} соответственно, а не выписанные явно функции определяются из соотношений $X_s + iY_s = Z_s$, $\Xi_s + iH_s = \Psi_s$.

Явные формулы для функций f_s, g_s, $s = 1, 2$ в системе (2) следующие:

$$
\begin{aligned}
&f_s = f_{s1} + f_{s2},\ g_s = g_{s1} + g_{s2},\ f_s = f_{s1} + f_{s2},\ g_s = g_{s1} + g_{s2},\ s = 1, 2,\\
&f_{11} = (a_{11}x_1 - b_{11}y_1)(x_1^2 + y_1^2),\ f_{12} = (a_{12}x_1 - b_{12}y_1)(x_2^2 + y_2^2),\\
&g_{11} = (a_{11}y_1 + b_{11}x_1)(x_1^2 + y_1^2),\ g_{12} = (a_{12}y_1 + b_{12}x_1)(x_2^2 + y_2^2),\\
&f_{21} = (a_{21}x_2 - b_{21}y_2)(x_1^2 + y_1^2),\ f_{22} = (a_{22}x_2 - b_{22}y_2)(x_2^2 + y_2^2),\\
&g_{21} = (a_{21}y_2 + b_{21}x_2)(x_1^2 + y_1^2),\ g_{22} = (a_{22}y_2 + b_{22}x_2)(x_2^2 + y_2^2).
\end{aligned}
$$

Выполним масштабирование: $(x_1, y_1) \to \mu^{1/3}(x_1, y_1), (x_2, y_2) \to \mu^{2/3}(x_2, y_2)$. Тогда, выделяя в уравнениях члены по μ в наинизшей степени, получим

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \mu^{2/3}[f_{12}(x_1, y_1) + F_1^0(t)] + O(\mu),\\
\dot{y}_1 &= \mu^{2/3}[g_{12}(x_1, y_1) + G_1^0(t)] + O(\mu),\\
\dot{x}_2 &= \omega_2 y_2 + \mu^{1/3}\Xi_2^0(t) + +O(\mu^{2/3}),\\
\dot{y}_2 &= -\omega_2 x_2 + \mu^{1/3} H_2^0(t) + O(\mu^{2/3}),
\end{aligned}
$$

где функции с индексом 0 сверху получаются из функций F_1, G_1 при $\mu = x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$. К этой системе применима теорема существования периодических движений [7, Теорема 5].

При $\mu = 0$ подсистема уравнений для переменных x_2, y_2 имеет единственное 2π-периодическое решение — нулевое. Тогда начальные точки для x_1, y_1 находятся из системы амплитудных уравнений

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&f(x_1, y_1) + I_{x1}(2\pi) = 0, \quad g_1(x_1, y_1) + I_{y1}(2\pi) = 0,\\
&I_{x1}(t) = \int\limits_0^t F_1^0(t)dt, \quad I_{y1} = \int\limits_0^t G_1^0(t)dt.
\end{aligned}
$$

Эта система имеет единственное (простое) решение

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
x_1^0 &= -\frac{I_{y1}b_{11} - I_{x1}a_{11}}{\sqrt[3]{2\pi(a_{11}^2 + b_{11}^2)[(I_{x1}b_{11} - I_{y1}a_{11})^2 + (I_{y1}b_{11} + I_{x1}a_{11})^2]}},\\
y_1^0 &= \frac{-(I_{x1}b_{11} + I_{y1}a_{11})}{\sqrt[3]{2\pi(a_{11}^2 + b_{11}^2)[(I_{x1}b_{11} - I_{y1}a_{11})^2 + (I_{y1}b_{11} + I_{x1}a_{11})^2]}}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, согласно [7, Теорема 5] система (1) допускает резонансное 2π-периодическое решение, на котором с учетом масштабирования имеем

$$
\begin{aligned}
&z_1 = (x_1 + iy_1)\exp(ipt),\\
&x_1 = \mu^{1/3}x_1^0 + \mu\int_0^t [f(x_1^0, y_1^0) + F_1^0(t)]dt + o(\mu),\\
&y_1 = \mu^{1/3}y_1^0 + \mu\int_0^t [g(x_1^0, y_1^0) + G_1^0(t)]dt + o(\mu),\\
&x_2 = \mu x_2^*(t) + o(\mu), \quad y_2 = \mu y_2^*(t) + o(\mu),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $x_2^*(t)$, $y_2^*(t)$ — решение второй подсистемы в (3) при $\mu = 0$.

Теорема 1. *В случае, когда $\omega_1 = p$, $\omega_2 \neq q$ $(p, q \in N)$ система (1) всегда допускает единственное резонансное колебание (6).*

Замечание 1. *Из теоремы 1 следует, что целой частоте ω в связанной управляемой системе общего вида отвечает единственное резонансное колебание.*

3. Колебание всей системы

Рассмотрим случай, когда обе частоты — натуральные числа: $\omega_1 = p_1$, $\omega_2 = p_2$, $p_1, p_2 \in N$.

Здесь отдельный интерес представляет исследование резонансного колебания, в котором равноправно участвуют все переменные. Для доказательства существования такого колебания выполним в системе (1) преобразование $z_1 = w_1 e^{p_1 t}$, $z_2 = w_2 e^{-p_2 t}$ и после масштабирования $(x_1, y_1, x_2, y_2) \to \mu^{1/3}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ запишем полученную систему в виде

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_s = \mu^{2/3}[f_s(x_1, y_1, x_2, y_2) + \Xi_s^0(t)\cos p_s t] + O(\mu),\\
&\dot{y}_s = \mu^{2/3}[g_s(x_1, y_1, x_2, y_2) + (-1)^s H_s^0(t)\sin p_s t] + O(\mu),\\
&\ s = 1, 2,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где правые части имеют период, равный 2π. Теперь составим систему амплитудных уравнений, которые удобно записывать относительно комплексных величин

$$v_s^0 = x_s^0 + iy_s^0, \ s = 1, 2,$$

представляющих собой начальную точку (v_1^0, v_2^0) для колебания в системе (7). Получим

$$
\begin{aligned}
&(C_{11}|v_1^0|^2 + C_{12}|v_2^0|^2)v_1^0 + \int\limits_0^{2\pi} \Psi_1(0, 0, 0, t)dt = 0,\\
&(C_{21}|v_1^0|^2 + C_{22}|v_2^0|^2)v_2^0 + \int\limits_0^{2\pi} \Psi_2(0, 0, 0, t)dt = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Согласно [7, теорема 5] каждому простому корню (v_1^0, v_2^0) амплитудного уравнения (8) отвечает изолированное резонансное колебание системы (1):

$$
\begin{aligned}
&z_s = v_s \exp{(ip_s t)}, \\
&x_s = \mu^{1/3} x_s^0 + \mu \int\limits_0^t [f_s(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) + \Xi_s^0(t) \cos p_s t] dt + o(\mu), \\
&y_s = \mu^{1/3} y_s^0 + \mu \int\limits_0^t [g_s(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) + (-1)^s H_s^0(t) \sin p_s t] dt + o(\mu), \quad s = 1, 2.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Таким образом, устанавливается существование 2π-периодического резонансного колебания, в котором все переменные колеблются с амплитудой $O(\mu^{1/3})$.

Теорема 2. *В случае натуральных частот $\omega_1 = p_1, \omega_2 = p_2, (p_1, p_2 \in N)$ связанная система система (1) допускает резонансное колебание (9), в котором каждая из переменных z_1 и z_2 колеблется с амплитудой порядка $\mu^{1/3}$; начальные точки (z_1^0, z_2^0) даются простыми корнями амплитудного уравнения (8).*

Замечание 2. *Теорема 2 справедлива вне зависимости от величины связи.*

4. Заключение

В окрестности равновесия, когда в первом приближении система распадается на независимые осцилляторы, получим сильно связанную нелинейную систему. В зависимости от наличия внутреннего резонанса до 4-го порядка включительно получаются разные задачи о колебаниях. Под действием малого периодического управления в системе реализуются резонансные колебания. В случае одной целой частоты реализуется одно колебание, ранее обнаруженное в частном случае (системы Ляпунова). В случае двух целых частот резонанс проявляется во всех переменных: амплитуда колебаний по каждой переменной равна $O(\mu^{1/3})$. В нерезонансном колебании амплитуда колебаний равна $O(\mu)$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00146).

Список литературы

1. Тхай В.Н. Модель, содержащая связанные подсистемы // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 32-41.
2. Евдокименко А.П. О Равновесных конфигурациях двух связанных маятников и их устойчивости // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 47-58.
3. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГТТЛ, 1956.
4. Sevryuk M.B. Reversible systems. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 121. Berlin: Springer, 1986.
5. Тхай В.Н. Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // Прикл. матем. механ. 2000. Т. 64, Вып. 1. С. 56-72.
6. Тхай В.Н. Резонансные ляпуновские семейства периодических движений обратимых систем // Прикл. матем. механ. 2004. Т. 68, Вып. 3. С. 394-401.
7. Тхай В.Н. О методе Ляпунова–Пуанкаре в теории периодических движений // Прикл. матем. механ. 1998. Т. 62, Вып. 3. С. 355-371.