УДК 62.534(031)

О СТАБИЛИЗАЦИИ В ЦЕЛОМ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

С.П. Безгласный
Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева
Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru

Ключевые слова: глобальная стабилизация, программные движения, твердое тело, обратная связь, функция Ляпунова.

Аннотация: Решена задача о построении асимптотически устойчивых в целом произвольно заданных программных движений относительно центра масс твердого тела. Решение проведено построением внешнего программного управления и стабилизирующего управления по принципу обратной связи. Управление синтезировано в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными.

1. Введение

Научный интерес к одной из самых знаменитых проблем механики – задаче об управлении движением твердого тела относительно неподвижной точки – определяется ее практическим значением для динамики вращательного движения космических аппаратов и прикладной теории гироскопов. Задачи о стабилизации заданных программных движений твердого тела решались разными методами авторами в многочисленных работах. В частности, метод декомпозиции при управлении твердым телом использовался учеными в монографиях [1, 2]. В [3] рассмотрены натуральные лагранжевые системы, моделируемые механизмами с кинематической структурой дерева и использовано неявное задание функции Ляпунова. Экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами посвящена работа [4]. С помощью метода предельных функций решены задачи о стабилизации нестационарных движений механических систем в нелинейной постановке [5, 6], задача о стабилизации с гарантированной оценкой качества [7], о стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей [8], о трехосной ориентации гиростата с переменными моментами инерции [9], о стабилизации программных движений твердого тела с полостью с жидкостью большой вязкости [10] и другие.

Ниже ставится и решается задача об определении управляющих моментов, реализующих и стабилизирующих в целом произвольные заданные программные движения твердого тела относительно центра масс. Решение проводится построением активного управления, приложенного к телу и представляющего собой совокупность программного управления и стабилизирующего управления по принципу обратной связи. Исследование программного движения сводится к анализу нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова классической теории устойчивости. Метод предельных функций и предельных систем [11], предлагающий современные модификации теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости, позволяет расширить выбор использованных функций Ляпунова за счет функций со знакопостоянными производными и делает возможным строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

2. Постановка задачи

Рассматривается пространственное движение динамически несимметричного твердого тела относительно общего центра масс O. Вводятся следующие системы координат: $O'\xi\eta\zeta$ –неподвижная система координат; $OXYZ$ – подвижная Кениговая система координат; $Oxyz$ – система координат, жестко связанная с телом. Положение несущего тела относительно системы $OXYZ$ будет характеризоваться углами Эйлера φ, θ, ψ, они же принимаются за компоненты вектора обобщенных координат $\mathbf{q} = (\psi, \theta, \varphi)^{\mathrm{T}}$, где символ $(\ )^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонирование. Главные моменты инерции тела, вычисленные в связанной системе координат, обозначаются A, B, C. Предполагается, что значения этих моментов инерции рассматриваемой системы не зависят от времени.

Ниже будут исследоваться сферические движения тела относительно центра масс. Ставится задача о реализации управляющими силами, прикладываемыми к телу, произвольно заданных (программных) движений тела и стабилизации в целом этих движений.

Программным (желаемым) движением будет называться пара $(\mathbf{q}^*(t),\ \dot{\mathbf{q}}^*(t))$, где $\mathbf{q}^*(t)$ – ограниченная, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая вектор-функция размерности $n = 3$, описывающая некоторое заданное вращательное движение тела относительно центра масс. В общем случае функция $\mathbf{q}^*(t)$, задающая программное движение, может не являться решением системы дифференциальных уравнений, описывающих движения управляемой механической системы. Поэтому в дальнейшем будут реализовываться программные движения, разделяя управляющие воздействия на две группы: силы, реализующие программное движение, и силы, стабилизирующие его.

3. Вывод уравнений движения

Запишем уравнения движения тела в форме уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{cases} \ddot{\psi}\left((A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta + C\cos^2\theta\right) + 0,5\ddot{\theta}(A-B)\sin\theta\sin 2\varphi + \\ +\ddot{\varphi}C\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin 2\theta(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - C) + \dot{\psi}\dot{\varphi}(A-B)\sin^2\theta\sin 2\varphi + \\ +0,5\dot{\theta}^2(A-B)\cos\theta\sin 2\varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\left((A-B)\cos 2\varphi - C\right) = Q_\psi^c, \\ 0,5\ddot{\psi}(A-B)\sin\theta\sin 2\varphi + \ddot{\theta}(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi) + \dot{\psi}\dot{\varphi}(A-B)\sin\theta\cos 2\varphi +, \\ +\left(\dot{\theta}\dot{\varphi} + 0,5\dot{\psi}\dot{\theta}\right)(B-A)\sin 2\varphi + 0,5\dot{\psi}^2(C-A)\sin 2\theta + C\sin\theta\dot{\psi}\dot{\varphi} = Q_\theta^c, \\ \ddot{\psi}C\cos\theta + \ddot{\varphi}C - \dot{\theta}\dot{\psi}C\sin\theta + 0,5\dot{\psi}^2(B-A)\sin^2\theta\sin 2\varphi + \\ +0,5\dot{\theta}^2(A-B)\sin 2\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}(B-A)\sin\theta\cos 2\varphi = Q_\varphi^c. \end{cases} \tag{1}$$

Кинетическая энергия тела запишется в виде

$$2T=\left\{A(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi)^2+B(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi)^2+C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)^2\right\}$$

и представима $2T=\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, где $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ – симметричная матрица с элементами:

$$a_{11}=\sin^2\theta\left(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi\right)+C\cos^2\theta,$$

$$a_{12}=a_{21}=\sin\theta\left(A-B\right)\cos\varphi\sin\varphi,\ \ a_{13}=a_{31}=C\cos\theta,$$

$$a_{22}=A\cos^2\varphi+B\sin^2\varphi,\ \ a_{23}=a_{32}=0,\ \ a_{33}=C.$$

Уравнения (1) запишем в векторно-матричной форме:

(2) $$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{\Lambda}=\mathbf{Q}^c,$$

где через $\mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ обозначен вектор-столбец с компонентами:

(3) $$\Lambda_i=\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot q_k\dot q_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}\dot q_k\dot q_j,\ \ (i=\overline{1,3}).$$

Считается, что вектор управляющих воздействий $\mathbf{Q}^c=(Q^c_\psi,Q^c_\theta,Q^c_\varphi)^{\mathrm{T}}$, определяемых в дальнейшем, является совокупностью программных $\mathbf{Q}^p=(Q^p_\psi,Q^p_\theta,Q^p_\varphi)^{\mathrm{T}}$ и стабилизирующих $\mathbf{Q}^s=(Q^s_\psi,Q^s_\theta,Q^s_\varphi)^{\mathrm{T}}$ обобщенных сил: $\mathbf{Q}^c=\mathbf{Q}^p+\mathbf{Q}^s$.

4. Программное и стабилизирующее управления

Предположим, что тело должно совершать некоторое программное движение $\mathbf{r}(t)=(\psi^*(t),\ \theta^*(t),\ \varphi^*(t))^{\mathrm{T}}$, где $\psi^*(t),\ \theta^*(t),\ \varphi^*(t)$ – заданные функции времени, описывающие заданное сферическое движение тела относительно его центра масс. Прямой подстановкой программного движения $\mathbf{r}(t)=(\psi^*(t),\ \theta^*(t),\ \varphi^*(t))^{\mathrm{T}}$ в систему (2) определяются управляющие силы, реализующие это движение:

(4) $$\mathbf{Q}^p=\mathbf{A}(\mathbf{r}(t))\ddot{\mathbf{r}}+\mathbf{\Lambda}(\mathbf{r}(t),\dot{\mathbf{r}}(t)).$$

Компоненты вектора $\mathbf{Q}^p$ вычисляются по формулам (4), (3). В частности,

$$Q^p_\varphi=\ddot\psi^*C\cos\theta^*+\ddot\varphi^*C-\dot\theta^*\dot\psi^*C\sin\theta^*+0{,}5\left(\dot\psi^*\right)^2(B-A)\sin^2\theta^*\sin2\varphi^*+$$

$$+0{,}5\left(\dot\theta^*\right)^2(A-B)\sin\varphi^*+\dot\psi^*\dot\theta^*\sin\theta^*\left((B-A)\cos2\varphi^*-C\right),$$

Выражения для компонент Q^p_ψ и Q^p_θ опущены в силу их громоздкости.

Добавлением обобщенных сил (4) в уравнения (2) записываются уравнения движений управляемой системы, для которой программное движение $\mathbf{r}(t)$ является решением, но, вообще говоря, не является устойчивым в смысле устойчивости по Ляпунову. Возникает задача его глобальной стабилизации, состоящая в определении активных сил $\mathbf{Q}^s=(Q^s_\psi,Q^s_\theta,Q^s_\varphi)^{\mathrm{T}}$, которые обеспечат асимптотическую устойчивость в целом исследуемого движения. Вводятся новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу

$$\mathbf{x}=\mathbf{q}-\mathbf{r}(t)=(\psi-\psi^*(t),\ \theta-\theta^*(t),\ \varphi-\varphi^*(t))^{\mathrm{T}}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}.$$

В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится, и уравнения возмущенного движения примут вид:

(5) $$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{\Lambda}+\mathbf{\Lambda}'+\mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}}+\mathbf{\Lambda}''=\mathbf{Q}^p+\mathbf{Q}^s,$$

где $\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{q})=\mathbf{A}(\mathbf{r}+\mathbf{x})$, через $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda}'$ и $\mathbf{\Lambda}''$ обозначены соответственно квадратичная, линейная и нулевая по скоростям отклонений векторные формы с компонентами:

$$\Lambda_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j, \quad i = \overline{1,3}$$

$$\Lambda'_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{x}_j, \ i = \overline{1,3}$$

$$\Lambda''_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{r}_j, \quad i = \overline{1,3}\,.$$

Или в явном виде:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \sin(2\theta^* + 2x_2)\Big(A\sin^2(\varphi^* + x_3) + B\cos^2(\varphi^* + x_3) - C\Big)\dot{x}_1\dot{x}_2 + \\
&+(A-B)\sin^2(\theta^* + x_2)\sin(2\varphi^* + 2x_3)\dot{x}_1\dot{x}_3 + 0.5(A-B)\cos(\theta^* + x_2)\times \\
&\times\sin(2\varphi^* + 2x_3)\dot{x}_2^2 + \sin(\theta^* + x_2)\Big((A-B)\cos(2\varphi^* + 2x_3) - C\Big)\dot{x}_2\dot{x}_3; \\
\Lambda'_1 &= \sin(2\theta^* + 2x_2)\Big(A\sin^2(\varphi^* + x_3) + B\cos^2(\varphi^* + x_3) - C\Big)(\dot{x}_1\dot{\theta}^* + \dot{x}_2\dot{\psi}^*) + \\
&+(A-B)\sin^2(\theta^* + x_2)\sin(2\varphi^* + 2x_3)(\dot{\varphi}^*\dot{x}_1 + \dot{x}_3\dot{\psi}^*) + \\
&+(A-B)\cos(\theta^* + x_2)\sin(2\varphi^* + 2x_3)\dot{\theta}^*\dot{x}_2 + \\
&+\sin(\theta^* + x_2)\Big((A-B)\cos(2\varphi^* + 2x_3) - C\Big)(\dot{\varphi}^*\dot{x}_2 + \dot{x}_3\dot{\theta}^*); \\
\Lambda''_1 &= \sin(2\theta^* + 2x_2)\Big(A\sin^2(\varphi^* + x_3) + B\cos^2(\varphi^* + x_3) - C\Big)\dot{\psi}^*\dot{\theta}^* + \\
&+(A-B)\sin^2(\theta^* + x_2)\sin(2\varphi^* + 2x_3)\dot{\psi}^*\dot{\varphi}^* + 0,5(A-B)\cos(\theta^* + x_2)\times \\
&\times\sin(2\varphi^* + 2x_3)\dot{\theta}^{*2} + \sin(\theta^* + x_2)\Big((A-B)\cos(2\varphi^* + 2x_3) - C\Big)\dot{\theta}^*\dot{\varphi}^*.
\end{aligned}$$

Выражения для компонент Λ_2, Λ_3, Λ'_2, Λ'_3, Λ''_2 и Λ''_3 выписываются аналогично.

Выберем функцию Ляпунова в виде:

$$2V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}, \tag{6}$$

где $\mathbf{C}$ – ограниченная постоянная симметричная матрица. Производная по времени функции (6) в силу системы (5) записывается равенством

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\dot{\mathbf{r}}\right)\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}' - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{\Lambda}'' + \frac{1}{2}\mathbf{N} + \mathbf{Q}^p + \mathbf{Q}^s), \tag{7}$$

где символом $\mathbf{N}$ обозначен вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j, \quad i = \overline{1,3}\,.$$

Зададим стабилизирующее управление равенством:

$$\mathbf{Q}^s = -\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}' - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\dot{\mathbf{r}}\right)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda}'' + \mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}\mathbf{N} - \mathbf{Q}^p, \tag{8}$$

где постоянная матрица $\mathbf{D}$ является ограниченной, и выбирается согласно неравенству $d_0\mathbf{E} \le \mathbf{D} \le d_1\mathbf{E}$, $(0 < d_0 < d_1 - \mathrm{const})$, $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Слагаемое $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\dot{\mathbf{r}}\right)\dot{\mathbf{x}}$ есть вектор-столбец с компонентами $-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{x}_j$, $i = \overline{1,3}$. Тогда производная функции Ляпунова (7) имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} \le -d_0\left\|\dot{\mathbf{x}}^2\right\| \le 0. \tag{9}$$

Функция (9) является отрицательно определенной функцией по скоростям. Обоснование асимптотической устойчивости программного движения проводится с помощью теоремы из работы [11], развивающей метод функций Ляпунова и позволяющей использовать функции Ляпунова не со знакоопределенной, а со знакопостоянной производной. Предполагается, что множество $\{\dot{\mathbf{x}} = 0\}$ не содержит решений предельной в смысле [11] к системе (5) с управлением (8) системы, кроме нулевого решения $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = 0$. Кроме того, функция Ляпунова (6) является бесконечно большой функцией своих аргументов. Таким образом имеет место асимптотическая устойчивость в целом исследуемого программного движения $\mathbf{r}(t) = (\psi^*(t),\ \theta^*(t),\ \varphi^*(t))^{\mathrm{T}}$.

5. Заключение

В работе решена задача о синтезе асимптотически устойчивых в целом сферических программных движений твердого тела относительно его центра масс. Получено множество управлений, стабилизирующих многообразие произвольно заданных программных движений тела. Управление было построено аналитически в явном виде в классе непрерывных функций. Исследуемая задача решалась на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функции Ляпунова со знакопостоянной производной.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00791а).

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 328 с.
2. Матюхин В.И. Универсальные законы управления механическими системами. М.: МАКС Пресс, 2001. 249 с.
3. Каюмов О.Р. Глобально управляемые механические системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 168 с.
4. Косов А.А. Об экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, Вып. 3. С. 411-426.
5. Андреев А.С., Бойкова Т.А. Об устойчивости неустановившегося движения механической системы // ПММ. 2004. Т. 68, Вып. 4. С. 678-686.
6. Перегудова О.А. О стабилизации движений неавтономных механических систем // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, Вып. 2. С. 176-188.
7. Андреев А.С., Безгласный С.П. О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61, Вып.1. С.44-51.
8. Андреев А.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, Вып. 2. С. 137-153.
9. Безгласный С.П. Активная ориентация гиростата с переменными моментами инерции // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, Вып.6. С. 766-777.
10. Bezglasnyi S.P. Stabilizing the programmed motion of a rigid body with a cavity filled with viscous fluid // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. Vol. 56, No. 5. P. 749-758.
11. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48, Вып. 2. С. 225-232.