УДК 517.977

СИНТЕЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ СО СНОСОМ В РАМКАХ НЕЛИНЕЙНЫХ УСЛОВИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ

А.Л. Зуев

Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems

Sandtorstraße 1, 39106 Magdeburg, Germany

E-mail: zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de

В.В. Грушковская

Institute of Mathematics, Julius Maximilian University of Würzburg

Emil-Fischer-Straße 40, 97074 Würzburg, Germany

E-mail: viktoriia.grushkovska@mathematik.uni-wuerzburg.de

Ключевые слова: стабилизация, нестационарная обратная связь, ранговое условие управляемости, скобки Ли, прямой метод Ляпунова, неголономная система.

Аннотация: Доклад посвящен развитию конструктивного подхода к решению задачи стабилизации положений равновесия нелинейных систем с дефицитом управляющих воздействий. Предполагается, что линейное приближение систем рассматриваемого класса может не удовлетворять ранговому условию Калмана, а управляемость обеспечивается привлечением скобок Ли старших порядков. Для решения поставленной задачи стабилизации предложена явная параметризация нестационарных управлений с обратной связью с использованием быстро осциллирующих тригонометрических полиномов. Разработана схема анализа устойчивости невозмущенного решения соответствующей замкнутой системы на основе развития прямого метода Ляпунова с использованием функциональных представлений Чена–Флисса. Получены достаточные условия экспоненциальной стабилизируемости положения равновесия в терминах условий управляемости со скобками Ли фиксированного порядка. Предложенная схема применена для стабилизации класса неголономных механических систем с постоянно действующими возмущениями.

1. Введение

В данном докладе будет рассмотрена задач стабилизации для класса нелинейных систем вида

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где x является вектором состояния, u – управление, функции $f_0, f_1, \ldots, f_m \in C^2(D;\mathbb{R}^n)$. Известно, что даже в случае нулевого сноса $f_0(x) \equiv 0$, из управляемости системы (1) не следует возможность ее стабилизации посредством регулярного управления, которое зависело бы только от состояния системы. В частности, тривиальное положение равновесия $x = 0$ неголономной системы

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \ m < n \tag{2}$$

не может быть сделано асимптотически устойчивым путем использования дифференцируемой функции управления $u = k(x)$, $k(0) = 0$, если векторные поля $f_1(0)$, $f_2(0)$, ..., $f_m(0)$ являются линейно независимыми [2]. Этот отрицательный результат также справедлив и для разрывных функций обратной связи по состоянию, если решения соответствующей замкнутой системы определены по Филиппову [10].

Таким образом, для доказательства стабилизируемости общей управляемой системы можно использовать два основных подхода. Согласно первому подходу, состояние равновесия управляемой системы (1) может быть стабилизировано с помощью *разрывной* функции обратной связи с использованием сценария переключения на скользящем режиме [11] (в аналитическом случае) или с определением решений (“π-траекторий”) в смысле семплинга [3]. Второй подход основывается на применении *зависящих от времени* функций обратной связи $u = k(x,t)$. В частности, из работы J.-M. Coron [4, Theorem 11.28] следует, что если система (1) удовлетворяет Ли-алгебраическому ранговому условию в $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, точка $x = 0$ является локально непрерывно достижимой за малое время, и $n \notin \{2,3\}$, то система (1) является локально стабилизируемой за малое время посредством почти гладких периодических по времени функций обратной связи. Стоит подчеркнуть, что доказательства упомянутых условий стабилизируемости не являются конструктивными, то есть не дают универсального алгоритма построения функций управления, применимого к общему классу управляемых систем.

2. Постановка задачи

В этом докладе будет обсуждаться вопрос возможности *построения* стабилизирующего управления $u = k(x,t)$ в виде тригонометрического полинома от t с коэффициентами, зависящими от x, при условии, что выполнены условия теоремы Корона. Для частного класса систем без дрифта эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Открытая задача. *Предположим, что*

$$Lie_{x=0}\{f_j \,|\, 1 \leqslant j \leqslant m\} = \mathbb{R}^n.$$

Возможно ли построить такую зависящую от времени функцию управления

$$u_j = \sum_{k=-N}^{N} A_{kj}(x) e^{i\omega k t}, \quad j = 1, 2, ..., m, \tag{3}$$

для некоторых $N \geqslant 0$ и $\omega > 0$, что тривиальное решение замкнутой системы (2), (3) будет асимптотически устойчивым? Предполагается, что функции $A_{kj}(x)$ являются кусочно-непрерывными, $A_{kj}(x) = \overline{A_{-kj}}(x)$ для всех $x \in D$, и $A_{kj}(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Построение управлений (3) рассматривается как получение алгоритма, вычисляющего $A_{kj}(x)$ в терминах решений вспомогательной системы алгебраических уравнений, коэффициенты которых зависят от $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ и их скобок Ли в точке $x \in D$.

Отметим, что выбор параметризации в (3) обусловлен, в частности, тем, что синусоидальные управления естественным образом возникают в качестве оптимальных управлений для неголономного интегратора с L^2-нормой функции качества [1]. Быстро осциллирующие управления обратной связи также известны как эффективный инструмент в задачах планирования движения неголономных систем (см., например, [8, 9]).

В работах [12, 13] представлен способ явного задания функций управления вида (3) для задачи стабилизации системы (2) в предположении, что векторные поля системы удовлетворяют Ли-алгебраическому рангову условию со скобками Ли второго порядка. Коэффициенты $A_{kj}(x)$ управлений предложено определять как решение системы алгебраических уравнений второго или третьего порядков. В работе [6] представлено упрощение этой схемы путем сведения к системе линейных уравнений и доказана возможность использования полстроенных управлений для стабилизации системы (2) в неодносвязных областях.

Задача стабилизации становится еще более сложной для системы (1) с ненулевым сносом. Большинство работ в этом направлении представляют функции управления для задач планирования движения (см., например, [5, 7, 14]), в то время как вопрос стабилизируемости исследован только для отдельных систем.

3. Основные результаты

В данном докладе будет рассматривается общий класс афинных по управлению систем (2), для которых выполнено следующее ранговое условие:

$$\operatorname{span}\{f_i(x),\ [f_{j_1}, f_{j_2}](x)\, [f_0, f_l](x)\} = \mathbb{R}^n,\ i \in S_1,\ (j_1, j_2) \in S_2,\ l \in S_0, \tag{4}$$

с некоторыми множествами индексов $S_0, S_1 \subseteq \{1, 2, ..., m\}$, $S_2 \subseteq \{1, 2, ..., m\}^2$, $|S_1| + |S_2| + |S_0| = n$. В работе [14] для такой системы рассмотрены локальная двухточечная задача управления и локальная задача отслеживания траектории, без доказательства свойств устойчивости. В докладе будет представлен новый метод синтезу функций управления для системы (1), который, во-первых, позволяет стабилизировать положение равновесия системы, а во-вторых, использует упрощенные формулы для коэффициентов управления.

Основным результатом работы является следующее семейство функций управления $u_k = u_k^\varepsilon(t, x)$:

$$\begin{aligned} u_k^\varepsilon(t,x) = &\sum_{i\in S_1} a_i(x)\delta_{ki} + \sum_{(j_1,j_2)\in S_2} \sqrt{\frac{4\pi |a_{j_1j_2}(x)|\kappa_{j_1j_2}}{\varepsilon}} \left(\delta_{kj_1}\cos\left(\frac{2\pi\kappa_{j_1j_2}t}{\varepsilon}\right)\right.\\ &\left. + \operatorname{sign}\big(a_{j_1j_2}(x)\big)\delta_{kj_2}\sin\left(\frac{2\pi\kappa_{j_1j_2}t}{\varepsilon}\right)\right) + \sum_{l\in S_0}\frac{2\pi a_{0l}(x)\kappa_{0l}}{\varepsilon}\delta_{kl}\sin\left(\frac{2\pi\kappa_{0l}t}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где $k = 1, 2, ..., m$, $\kappa_{j_1j_2}, \kappa_{0l}$ являются попарно различными натуральными числами, δ_{ki} обозначает символ Кронекара. Вещественнозначные коэффициенты $a_i(x)$, $a_{j_1j_2}(x)$,

$a_{0l}(x)$ определяются по формуле

$$a(x) = -\gamma F^{-1}(x)x,$$

где $\gamma > 0$ – произвольный параметр,

$$a(x) = \Big(\big(a_i(x)\big)_{i\in S_1}, \big(a_{j_1j_2}(x)\big)_{(j_1,j_2)\in S_2}, \big(a_{0l}(x)\big)_{l\in S_0} \Big)^T \in \mathbb{R}^n$$

– вектор коэффициентов функции управления, а столбцы матрицы $F(x)$ являются векторами из рангового условия (4):

$$F(x) = \Big(\big(f_i(x)\big)_{i\in S_1}, \big(f_{j_1j_2}(x)\big)_{(j_1,j_2)\in S_2}, \big(f_{0l}(x)\big)_{l\in S_0} \Big).$$

Можно показать, что управления такого типа стабилизируют тривиальное положение равновесия системы (1) при условии,что ε выбрано достаточно малым.

В качестве примера, в докладе будет рассмотрена задача стабилизации системы, описывающей движение подводного автономного робота с неуправляемой компонентой угловой скорости:

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 + f_3(x)u_3, \quad x \in \mathbb{R}^6, \ u = (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathbb{R}^3, \tag{6}$$

где x_1, x_2, x_3 обозначают координаты центра масс, x_4, x_5, x_6 определяют углы Эйлера,

$$f_0(x){=}(0, 0, 0, u_0 \cos x_4 \tan\, x_5, -u_0 \sin x_4, u_0 \cos x_4 \sec x_5)^T, \ f_2(x) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T,$$
$$f_1(x) = (\cos x_5 \cos x_6, \cos x_5 \sin x_6, -\sin x_5, 0, 0, 0)^T,$$
$$f_3(x){=}(0, 0, 0, \sin x_4 \mathrm{tg}\, x_5, \cos x_4, \sin x_4 \sec x_5)^T,$$

управления u_1, u_2, u_3 задают прямолинейную скорость вдоль оси Ox_1 и две компоненты угловой скорости, соответственно. Несложно проверить, что векторные поля системы удовлетворяю ранговому цлсовию

$$\mathrm{span}\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), [f_0, f_1](x), [f_1, f_3](x), [f_2, f_3](x)\} = \mathbb{R}^6,$$

для всех $x{\in}\mathbb{R}^6$, таких, что $x_5{\neq}\frac{\pi}{2} \big(\mathrm{mod}\, \pi\big)$, т.е. ранговое условие (4) выполнено с $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{(1, 3), (2, 3)\}$, $S_0 = \{1\}$ для всех $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^6 \,|\, |x_5| < \frac{\pi}{2}\}$.

Еще одним результатом работы является построение стабилизирующих управлений для класса динамических неголономных систем вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^{m} f_i(x)v_i \\ \dot{v}_i &= u_i, \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{7}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ задает вектор состояния системы, $v = (v_1, \ldots, v_m)^T$ – вектор скоростей, $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$ – управление. В частности, будет представлено семейство управлений для случая выполнения рангового условия $\mathrm{span}\,\{f_i(x),\ [f_{j_1}, f_{j_2}](x)\} = \mathbb{R}^n$, $i \in S_1$, $(j_1, j_2) \in S_2$, с некоторыми множествами индексов $S_1 \subseteq \{1, 2, ..., m\}$, $S_2 \subseteq \{1, 2, ..., m\}^2$, $|S_1| + |S_2| = n$. Построение таких управлений будет проиллюстрировано на примерах динамических уравнений двухколесных автономных роботов.

Список литературы

1. Brockett R.W. Control theory and singular Riemannian geometry // New Directions in Applied Mathematics / P. J. Hilton and G. S. Young, eds. New York: Springer, 1981. P. 11-27.
2. Brockett R.W. Asymptotic stability and feedback stabilization // Differential Geometric Control Theory / R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, eds. Boston: Birkhäuser, 1983. P. 181-191.
3. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Sontag E.D., Subbotin A.I. Asymptotic controllability implies feedback stabilization // IEEE Trans. on Automatic Control. 1997. Vol. 42. P. 1394-1407.
4. Coron J.-M. Control and Nonlinearity. Providence: AMS, 2007.
5. Godhavn J.M., Balluchi A., Crawford L.S., Sastry, S.S. Steering of a class of nonholonomic systems with drift terms. // Automatica. 1999. Vol. 35, No. 5. P. 837-847.
6. Grushkovskaya V., Zuyev A. Obstacle Avoidance Problem for Second Degree Nonholonomic Systems // Proc. 57th IEEE Conf. on Desicion and Control. 2018. P. 1500-1505.
7. Jean F., Prandi D. Complexity of control-affine motion planning // SIAM Journal on Control and Optimization. 2015. Vol. 53, No. 2. P. 816-844.
8. Liu W. An approximation algorithm for nonholonomic systems // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35. P. 1328-1365.
9. Murray R.M., Sastry S.S. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids // IEEE Trans. on Automatic Control. 1993. Vol. 38. P. 700-716.
10. Ryan E.P. On Brockett's condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback // SIAM J. Control Optim. 1994. Vol. 32. P. 1597-1604.
11. Sussmann H.J. Subanalytic sets and feedback control // J. Differential Equations. 1979. Vol. 31. P. 31-52.
12. Zuyev A.L. Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls // SIAM J. Control Optim. 2016. Vol. 54. P. 1678-1696.
13. Zuyev A., Grushkovskaya V. Time-varying stabilization of a class of driftless systems satisfying second-order controllability conditions // Proc. European Control Conf. 2016. P. 575-580.
14. Zuyev A., Grushkovskaya V. Motion planning for control-affine systems satisfying low-order controllability conditions // International Journal of Control. 2017. Vol. 90, No. 11. P. 2517-2537.