УДК 517.935.4

ПРОБЛЕМА АЙЗЕРМАНА ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В.А. Каменецкий

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: vlakam@ipu.ru

Ключевые слова: системы с переключениями, системы Лурье, устойчивость, проблема Айзермана, функции Ляпунова, матричные неравенства.

Аннотация: Показывается, что динамика линейных систем с переключениями, которые названы попарно связными, может быть описана системами Лурье. Для попарно связных систем получено достаточное частотное условие существования квадратичной функции Ляпунова. Для систем с переключениями переформулирована известная проблема Айзермана. Приводится пример системы с переключениями между тремя подсистемами третьего порядка, для которой проблема Айзермана имеет положительное решение.

1. Введение

Задача абсолютной устойчивости, впервые сформулированная в [1], является одной из основных задач теории автоматического управления. Несмотря на огромное количество публикаций по этой задаче (см. библиографию в [2]) полное решение до сих пор не получено. В статье [3] была сформулирована известная гипотеза Айзермана о том, что система автоматического управления абсолютно устойчива в классе нелинейных характеристик из «гурвицевого угла». Гипотеза Айзермана была опровергнута, а проблема Айзермана об описании систем автоматического управления, для которых справедлива гипотеза Айзермана, продолжает оставаться актуальной до настоящего времени [2, 4]. Как отмечено в [4], существенный прогресс здесь был связан с появлением критерия Попова.

В настоящее время популярным объектом исследования являются системы с переключениями [5, 6]. Для систем с переключениями специального вида (связных) в [7] получен частотный критерий существования квадратичной функции Ляпунова. Здесь для более узкого класса систем (попарно связных) получено достаточное частотное условие существования такой функции Ляпунова. Появление этих аналитических критериев внушает сдержанный оптимизм по поводу возможности описания некоторого подмножества систем с переключениями, для которых справедлива гипотеза Айзермана.

Сама проблема Айзермана для систем с переключениями переформулирована с сохранением основного принципа: положительное решение означает, что весь диапазон, в котором устойчивы линейные подсистемы, должен совпадать с диапазоном, в котором устойчива система с переключениями между этими подсистемами. Для параметрического описания этого диапазона вместо «гурвицевого угла» используется понятие «гурвицевого луча». Привлекательность исследования устойчивости систем с переключениями в контексте проблемы Айзермана объясняется следующим. Наличие квадратичной функции Ляпунова является лишь достаточным условием устойчивости. Однако, если с помощью упомянутых критериев удается убедится, что область устойчивости совпадает с областью гурвицевости (проблема Айзермана имеет положительное решение), то в этом случае вопрос устойчивости решен окончательно и нет необходимости использовать другие критерии и функции Ляпунова из более сложных классов [8].

2. Попарно связные системы с переключениями

Стандартная форма записи линейной системы с переключениями имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in \overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\}, \tag{1}$$

где $A_s \in R^{n\times n}$ произвольные $n \times n$-матрицы и $A(t) : R_+ \longrightarrow \overline{A}$ — кусочно-постоянное отображение.

Понятие связной линейной системы с переключениями опирается на следующую конструкцию [7]. Каждой матрице A_s из системы (1) ставится в соответствие вершина графа. Две вершины графа соединяются ребром, если разность матриц, которым соответствуют эти вершины, имеет вид $bc^\top$, т.е. ранг матрицы разности равен 1. Система (1) называется связной, если соответствующий ей граф является связным.

Определение 1. *Систему (1) будем называть попарно связной, если каждая пара вершин из соответствующего графа соединена ребром этого графа. В этом случае множество $\overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ также будем называть попарно связным.*

Теорема 1. *Попарно связное множество матриц $\overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ допускает одно из двух представлений:*

$$A_1 = A, \quad A_s = A + bc_s^\top, \quad b, c_s \in R^n, \quad s = \overline{2, N}, \tag{2}$$

$$A_1 = A, \quad A_s = A + b_s c^\top, \quad b_s, c \in R^n, \quad s = \overline{2, N}. \tag{3}$$

Пусть попарно связное множество $\overline{A}$ представлено в виде (2) и пара $\{A, b\}$ управляема. В этом случае очевидно существует невырожденная замена координат, приводящая матрицы A и b к канонической форме Фробениуса. В этих новых координатах все матрицы множества $\overline{A}$ будут также иметь форму Фробениуса.

3. Системы с переключениями и системы Лурье

Множество решений системы с переключениями (1) совпадает [6] (с точностью до множества меры ноль) с множеством решений дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \{y : y = Ax, A \in \mathrm{conv}\overline{A}\}, \tag{4}$$

где $\operatorname{conv}\overline{A} = \operatorname{conv}\{A_1, \ldots, A_N\}$ — выпуклый многогранник в $R^{n\times n}$.

Пусть в попарно связной системе (1) матрицы A_s определяются соотношением (3), тогда многозначное отображение $F(x)$, определяющее включение (4), имеет вид

$$F(x) = \{y : y = Ax + \langle c, x\rangle \sum_{s=2}^{N} \lambda_s b_s,\ \sum_{s=2}^{N} \lambda_s = 1,\ \lambda_s \geqslant 0,\ s = \overline{2, N}\ \}. \tag{5}$$

Введем обозначения $\varphi_s = \lambda_{s+1}\langle c, x\rangle$, $s = \overline{1, N-1}$. Тогда набор условий на λ_s из (5) эквивалентен выполнению системы неравенств

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\langle c, x\rangle - \varphi_1) \geqslant 0, \quad \varphi_2(\langle c, x\rangle - \varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0,\\ &\varphi_3(\langle c, x\rangle - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \geqslant 0,\\ &\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ &\varphi_{N-1}\left(\langle c, x\rangle - \sum_{s=1}^{N-1} \varphi_s\right) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим систему Лурье

$$\dot{x} = Ax + \sum_{s=1}^{N-1} b_{s+1}\varphi_s(t, \sigma_s), \quad \sigma_s = \langle c, x\rangle, \tag{7}$$

в которой нелинейные функции $\varphi_s(t, \sigma_s)$ удовлетворяют неравенствам (6) при всех $\sigma_s = \langle c, x\rangle$ и $t > 0$. Следуя логике работы [9] показывается, что такая система (7), (6) эквивалентна включению (4), (5). Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в попарно связной системе (1) матрицы A_s определяются соотношением (3), тогда множество ее решений при произвольных переключениях совпадает (с точностью до множества меры ноль) с множеством решений системы Лурье (7) при всех нелинейностях $\varphi_s(t, \sigma_s)$, $\sigma_s = \langle c, x\rangle$, удовлетворяющих (6).*

Понятно, что функция Ляпунова $v(x) = x^\top Lx$ для включения (4), (5) будет одновременно функцией Ляпунова для системы Лурье (7), (6) и общей квадратичной функцией Ляпунова (ОКФЛ) для системы с переключениями (1), (3), а ее наличие определяется разрешимостью соответствующей системы матричных неравенств

$$A_s^\top L + LA_s < 0, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{8}$$

Достаточные частотные условия существования ОКФЛ для попарно связных систем получаются с помощью стандартной техники, основанной на S-процедуре [10]. Для формулировки результата потребуются следующие обозначения:

$$B = \begin{pmatrix} b_2 & b_3 & \ldots & b_N \end{pmatrix}, \quad C = (\underbrace{c \quad c \quad \ldots \quad c}_{N-1}),$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \tau_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \tau_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2/2 & \ldots & \frac{\tau_{N-1}}{2}\\ \tau_2/2 & \tau_2 & \ldots & \frac{\tau_{N-1}}{2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\tau_{N-1}}{2} & \frac{\tau_{N-1}}{2} & \ldots & \tau_{N-1} \end{pmatrix},$$

где $\tau_s > 0$ — параметры S-процедуры, $s = \overline{1, N-1}$.

Теорема 3. *Пусть матрица A гурвицева и существуют числа $\tau_s > 0$, $s = \overline{1, N-1}$, такие что $\Gamma > 0$ и при всех $\omega \in [-\infty, \infty]$ выполняется частотное неравенство*

$$\Gamma + \operatorname{Re} W(i\omega) > 0, \quad W(i\omega) = \tau C^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B, \tag{9}$$

в котором E_n — единичная $n \times n$ матрица и $\operatorname{Re} W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ эрмитово сопряженная к W. Тогда попарно связная система (1), (3) имеет ОКФЛ (система (8) разрешима, система (1) устойчива).

4. Проблема Айзермана

Пусть имеется некоторый набор матриц $\overline{A}$. Будем считать, что матрицы $A_s = A_s(\mathbf{k})$ зависят от векторного параметра $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N)$, $k_s \geqslant 0$ следующим образом

$$A_s(\mathbf{k}) = A + k_s B_s, \quad s = \overline{1, N}, \tag{10}$$

где $A \in \operatorname{conv}\overline{A}$ — некоторая матрица и $B_s = A_s - A$.

Областью устойчивости системы (1), в которой матрицы A_s определяются параметризацией (10) и матрица A гурвицева, будем называть область $U_S \subseteq R^N$, для всех точек которой система (1) устойчива при произвольном переключении режимов. Описание области устойчивости эквивалентно описанию границы этой области. Для нахождения точки границы рассматривается луч, выходящий из точки 0 и проходящий через эту точку. Далее выбирается и фиксируется произвольный вектор $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, направленный вдоль этого луча, и решается задача определения максимального числа k, такого что система (1) устойчива при $\mathbf{k} = k\overline{\alpha}$. В этом случае матрицы A_s в (10) фактически зависят от скалярного параметра k, т.е.

$$A_s(k) = A + k\alpha_s B_s, \quad s = \overline{1, N}. \tag{11}$$

Областью $U_{H,\overline{\alpha}}$ гурвицевости системы (1) и (11) вдоль вектора $\overline{\alpha}$ будем называть максимальный полуинтервал $[0, k_{\overline{\alpha}})$, для всех точек которого матрицы $A_s(k)$ являются гурвицевыми. Областью устойчивости системы (1) и (11) вдоль вектора $\overline{\alpha}$ будем называть область $U_{S,\overline{\alpha}}$, для всех точек которой система (1) и (11) устойчива при произвольном переключении режимов. Такая область $U_{S,\overline{\alpha}}$ автоматически является полуинтервалом. Одномерной проблемой Айзермана (вдоль вектора $\overline{\alpha}$) будем называть проблему описания систем (1) и (11), для которых $U_{H,\overline{\alpha}} = U_{S,\overline{\alpha}}$. Говоря нестрого, вектор $\mathbf{k} = k_{\overline{\alpha}}\overline{\alpha}$ будем называть «гурвицевым лучом». Полной проблемой Айзермана будем называть проблему описания систем (1), (10), для которых одномерная проблема Айзермана имеет положительное решение для любого направления $\overline{\alpha}$.

5. Пример

Рассмотрим систему вида (1) при $N = 3$. Пусть матрицы $\{A_1, A_2, A_3\}$ имеют следующие численные значения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1+k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Матрица A_1 очевидно гурвицева, матрица A_2 гурвицева при $k_1 \in [0, 1/3)$, A_3 — при $k_2 \in [0, 8)$. Система (1), в которой матрицы $\{A_1, A_2, A_3\}$ определяются соотношениями (12), является попарно связной и в случае $N = 3$ такая система в [7] называется системой треугольного типа. Использование критерия существования ОКФЛ для системы треугольного типа из [7] позволило установить, что одномерная проблема Айзермана имеет положительное решение вдоль любого направления $\overline{\alpha} = (1, k^*)$, $k^* < 24/7$. Полученный результат представляется интересным, так как вдоль всех указанных направлений найдена точная область устойчивости исследуемой системы с переключениями.

6. Заключение

В настоящей работе вводится понятие попарно связных систем с переключениями. Эти системы обладают максимальной «связностью», так как соответствующие им графы содержат максимальное количество ребер. Таким системам дается простое алгебраическое описание и показано, что динамика этих систем может быть представлена динамикой систем Лурье специального вида. В результате получен частотный критерий их устойчивости основанный на S-процедуре, который содержит меньше неопределенных параметров, чем критерий из [7].

В работе сформулирована проблема Айзермана для систем с переключениями. В контексте проблемы Айзермана, если область устойчивости, полученная на основании достаточного условия, совпадает с областью гурвицевости, то в этом случае найдена полная область устойчивости. Работоспособность такого подхода продемонстрирована на примере системы с переключениями между тремя подсистемами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН «Актуальные проблемы робототехники» (Проект № I.29).

Список литературы

1. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8, № 3. С. 246-248.
2. Либерзон М.Р. Очерки о теории абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 86-119.
3. Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем // Успехи мат. наук. 1949. Т. 14, Вып. 4 (32). С. 187-188.
4. Пятницкий Е.С. Работа М.А. Айзермана по теории регулирования, теории устойчивости движения и теории колебаний // Марк Аронович Айзерман (1918-1992). М.: Физматлит, 2003. С. 82-104.
5. Liberzon D. Switching in Systems and Control. Boston: Birkhäuser, 2003.
6. Shorten R., Wirth F., Mason O. et al. Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. No. 4. P. 545-592.
7. Каменецкий В.А. Частотные условия устойчивости гибридных систем // Автоматика и телемеханика. 2017. № 12. С. 3-25.
8. Молчанов А.П., Пятницкий Е.С. Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. I // Автоматика и телемеханика. 1986. № 3. 63-73.
9. Молчанов А.П., Пятницкий Е.С. Абсолютная неустойчивость нелинейных нестационарных систем. I, II // Автоматика и телемеханика. 1982. № 1. С. 19-27; № 2. С. 17-28.
10. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.