УДК 531.3

СТАБИЛИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛЬЮ СНОУБОРДИСТА

И.Е. Каспирович
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, Миклухо-Маклая ул., 6
E-mail: kaspirovich.ivan@mail.ru

Р.Г. Мухарлямов
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, Миклухо-Маклая ул., 6
E-mail: robgar@mail.ru

Ключевые слова: Математическое моделирование, управляющие моменты, стабилизация связей, динамика твердого тела, многозвенная модель.

Аннотация: В данной работе движение сноубордиста по заданной траектории моделируется системой двух звеньев, соединенных друг с другом при помощи идеального сферического шарнира. Аналогами мышечных усилий, удерживающих то или иное положение тела, являются управляющие моменты, которые задаются как обобщенные силы реакции связей. При численном интегрировании уравнений движения с управляющими моментами необходимо учитывать стабилизацию связей, таким образом определяя силы реакции как функции обобщенных координат, скоростей и параметров самой стабилизации.

1. Введение

В качестве модели, описываемой движение сноубордиста, используется антропоморфный механизм, представляющий собой систему последовательно шарнирно–соединенных друг с другом стержней–звеньев [1]. В отсутствии внутренних сил в подобной составной конструкции стержни сложатся или, например, упадут под действием силы тяжести. Поэтому для моделирования физически возможного положение тела или позы снубордиста вводятся дополнительные управляющие моменты. В данной работе они задаются в виде обобщенных сил реакции голономных связей, определяющих режим движения.

При задании механических связей возникает проблема накопления ошибок при численном интегрировании. Для ограничения подобного рода накопления применяется метод стабилизации связей Й.Баумгарта [2]. Движение сноубордиста в рассматриваемой модели представляет собой пример неголономной системы. Одним из приемов решения задач с неголономными связями является метод модификации уравнений Лагранжа второго рода, который представлен в работе Чаплыгина [3]. Особенности применения метода стабилизации связей к системам Чаплыгина рассматриваются в работе [4].

2. Моделирование сноубордиста

Движение сноубордиста по заданной траектории моделируется двухзвенной системой, состоящей из двух соединенных друг с другом стержней . Стержень, имитирующий стопу, принимается за нулевое звено, а стержень, имитирующий туловище, за первое. Толщиной, а значит и вращением стержней вокруг внутренней оси, в данной модели можно пренебречь. Нулевой стержень во время движения по траектории полностью лежит на плоскости, поэтому его положение описывается тремя координатами: (x_0, y_0) – координатами центра масс и $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ – углом между звеном и выбранной осью. Положение первого звена описывается пятью координатами: (x_1, y_1, z_1) – координатами центра масс, $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$– углом между проекцией звена на плоскость движения и выбранной осью и $\psi_1 \in [0, \pi]$ – углом наклона стержня к плоскости движения. Поскольку первое звено жестко присоединено к нулевому посредством сферического шарнира, то имеют место следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + l_1 n_1 \cos\psi_1 \cos\varphi_1, \\
y_1 &= y_0 + l_1 n_1 \cos\psi_1 \cos \sin_1, \\
z_1 &= l_1 n_1 \sin\psi_1,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где l_1 – длина звена, n_1 – положение центра масс звена относительно поверхности, при равномерном распределении массы $n_1 = 1/2$. Таким образом, количество независимых координат, описывающих модель, равно пяти.

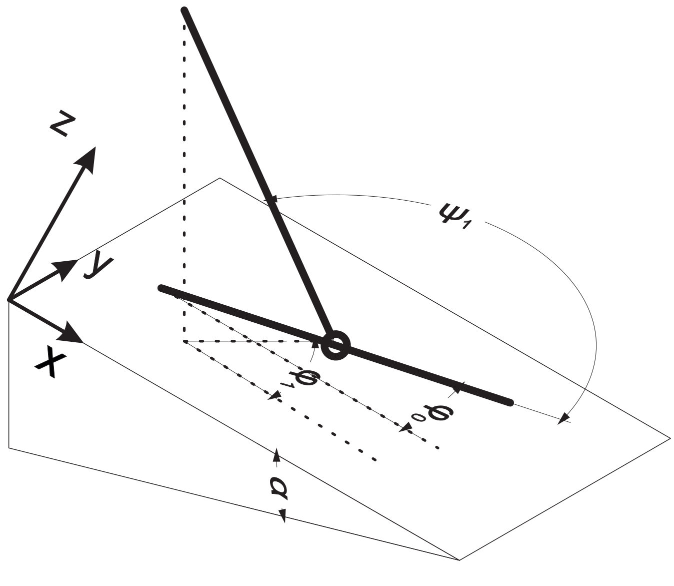

Рис. 1. Двухзвенная модель

Кинетическая энергия модели в обобщенных координатах $(x_0, y_0, \varphi_0, \varphi_1, \psi_1)$ с учетом (1) имеет вид

$$
T = \frac{m_0}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{J_0}{2}\dot{\varphi}_0^2 + \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{J_1}{2}(\cos\psi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2), \tag{2}
$$

где m_0, J_0, m_1 и J_1 – масса и момент инерции звеньев соответственно.

Пусть сноубордист спускается по траектории $y_0 = f(x_0)$ на наклонной плоскости. Если считать, что длина звеньев много меньше чем длина траектории, то потенциальная энергия запишется в виде

$$U = -(m_0 + m_1)gx_0 \sin\alpha, \tag{3}$$

где g – ускорение свободного падения, а α – угол наклона плоскости.

Пусть нулевое звено представляет собой идеальное лезвие. Таким образом, оно в каждый момент времени лежит на касательной к траектории, накладывая тем самым неголономную связь

$$\dot{y}_0 = \tan\varphi_0 \dot{x}_0. \tag{4}$$

Заданная траектория сноубордиста должна быть согласована с неголономной связью. Таким образом, выражение $y_0 = f(x_0)$ перепишется в виде

$$\tan\varphi_0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_0}. \tag{5}$$

Кинетическая и потенциальная энергии не зависят от координаты y_0, следовательно уравнения движения с неголономной связью (4) для координат x_0 и φ_0 можно записать в форме Чаплыгина

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial L^*}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_0}\right)^* \frac{\dot{\varphi}_0}{\cos^2\varphi_0} = Q_{x_0}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varphi}_0} - \frac{\partial L^*}{\partial \varphi_0} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_0}\right)^* \frac{\dot{x}_0}{\cos^2\varphi_0} = M_{\varphi_0}, \tag{6}$$

где $L = T - U$ – функция Лагранжа, M_{φ_0}, Q_{x_0} – обобщенные силы реакции, обеспечивающие движение по заданной траектории (5), $*$ – операция выражения скорости $\dot{y}_0$ с помощью (4). Уравнения для угловых координат первого звена запишутся стандартном виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\psi}_1} - \frac{\partial L^*}{\partial \psi_1} = M_{\psi_1}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L^*}{\partial \varphi_1} = M_{\varphi_1}, \tag{7}$$

где M_{φ_1} и M_{ψ_1} – управляющие моменты.

3. Управление и стабилизация

Управляющие моменты можно определить как обобщенные силы реакции голономных связей, задающих режим движения. Таким образом, на систему уравнений (6), (7) накладываются три дополнительные голономные связи $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$:

$$\begin{aligned} & f_1 = \tan\varphi_0 - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_0} = 0, \\ & f_2(\varphi_0, \varphi_1, \psi_1, x_0) = 0, \\ & f_3(\varphi_0, \varphi_1, \psi_1, x_0) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Учет связей в системе уравнений движения осуществляется методом произвольных множителей $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Таким образом, управляющие моменты и силы реакции запишутся в виде

$$
M_{\psi_1} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \psi_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \psi_1}, \quad Q_{x_0} = -\lambda_1 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x_0^2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_0} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_0},
$$
(9)
$$
M_{\varphi_1} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_1}, \quad M_{\varphi_0} = \frac{\lambda_1}{\cos^2 \varphi_0} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_0} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_0}.
$$

Для определения произвольных множителей составляется система алгебраических уравнений относительно обобщенных ускорений, которая состоит из уравнений движения и вторых полных производных по времени от голономных связей. Однако, для получения устойчивого численного решения необходимо применить метод стабилизации. При этом вторые производные приравниваются к линейной комбинации первых производных и самих связей:

$$
(10) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dot f_1 \\ \dot f_2 \\ \dot f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dot f_1 \\ \dot f_2 \\ \dot f_3 \end{pmatrix}
$$

Оптимальный подбор параметров возмущения связей k_{ij} позволяет добиться устойчивости численного решения.

4. Пример

Пусть траектория сноубордиста описывается слаломом, в простейшем случае который аппроксимируется синусоидой в выражении (5): $f(x_0) = A \sin kx_0$, где A – амплитуда траектории, k – волновое число. Голономные связи f_2 и f_3 в (8) задаются из соображений физиологической возможности и удобства положения тела во время движения. Например, пусть проекция первого звена на плоскость является к ней касательной, а угол его наклона колеблется синхронно с траекторией около вертикального положения $\pi/2$. То есть

$$
(11) \qquad \begin{aligned} f_1 &= \tan \varphi_0 - Ak \cos kx_0, \\ f_2 &= \varphi_1 - \varphi_0, \\ f_3 &= \psi_1 - \pi/2 - \delta \cos kx_0, \end{aligned}
$$

где δ – задаваемый малый параметр.

Результаты численного интегрирования уравнений движения (6), (7), (9) со связями (11) и с учетом стабилизации (10) изображены на графиках: рис.(2) – рис.(4).

Траектория очевидно представляет собой синусоиду. Управляющий момент M_{ψ_1} не позволяет первому звену упасть на плоскость. Отклонение угла ψ_1 от вертикального положения по плану колеблется синхронно с траекторией, а угол φ_1 является касательной к траектории в каждый момент времени.

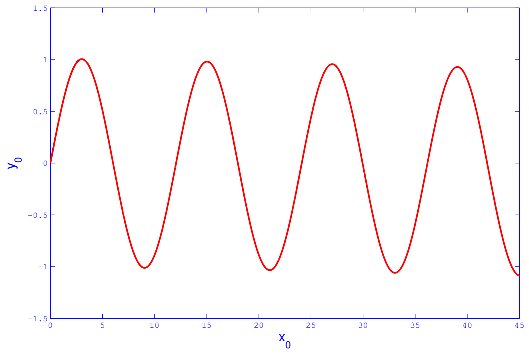

Рис. 2. Траектория модели

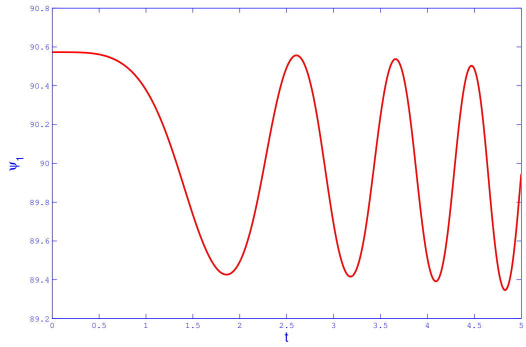

Рис. 3. Зависимость координаты ψ_1 от времени

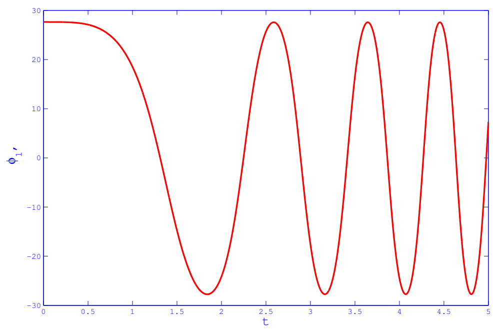

Рис. 4. Зависимость координаты φ_1 от времени

5. Заключение

В двухзвенной модели сноубордиста выбор голономной связи задает режим движения. При этом оптимальный подбор значений параметров возмущения обеспечивает устойчивость численного решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-08-00261 А).

Список литературы

1. Борисов А.В. Уравнения динамики многозвенных систем с деформируемыми элементами структуры. Минск: БНТУ, 2004. 43 с. Деп. в ВИНИТИ 19.11.2014 № 1819-В2004
2. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1972. Vol. 1, No. 1. P. 1-16.
3. Чаплыгин С.А. Исследование по динамике неголономных систем // М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 112 с.
4. Kaspirovich I.E., Mukharlyamov R.G. Constraint stabilization application to chaplygin systems // 2018 International Russian Automation Conference RusAutoCon 2018. P. 1-4.