УДК 517.938+517.977

# МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

**А.П. Крищенко**

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*

Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

E-mail: apkri@bmstu.ru

**Ключевые слова:** инвариантный компакт, локализация, устойчивость, фуункция Ляпунова, качественный анализ.

**Аннотация:** Излагаются основные понятия метода локализации инвариантных компактов и результаты, полученные с его использованием при исследовании устойчивости положений равновесия, построении функций Ляпунова, нахождении скрытых аттракторов и описании поведения траекторий автономных систем.

## 1. Метод локализации

Рассмотрим систему $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ и множество $Q \subset \mathbf{R}^n$. Любой функции $\phi \in C^1(\mathbf{R}^n)$ соответствует множество

$$S(\phi) = \{x \in \mathbf{R}^n : \dot{\phi}(x) = 0\},$$

называемое универсальным сечением и экстремальные значения

$$\phi_{\inf}(Q) = \inf_{S(\phi)\cap Q} \phi(x), \quad \phi_{\sup}(Q) = \sup_{S(\phi)\cap Q} \phi(x).$$

**Теорема 1.** *[1] Все инвариантные компакты автономной системы $\dot{x} = f(x)$ содержащиеся в множестве $Q$, содержатся в локализирующем множестве*

$$\Omega(\phi, Q) = Q \cap \{\phi_{\inf}(Q) \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q)\}.$$

Пусть функции $h_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ принадлежат $C^1(\mathbf{R}^n)$. Рассмотрим локализирующие множества

$$K_0 = Q, \quad K_i = \Omega(h_i, K_{i-1}), \quad i = 1, 2 \ldots.$$

**Теорема 2.** *[1] Все инвариантные компакты автономной системы $\dot{x} = f(x)$ содержащиеся в множестве $Q$, содержатся в локализирующих множествах $K_i$, $i \geqslant 0$.*

# 2. Использование метода локализации

## 2.1. Исследование устойчивости

**Теорема 3.** *[2] Пусть в каждом из локализирующих множеств $K_i$ содержится некоторая окрестность положения равновесия, последовательность множеств $K_i$ стягивается к положению равновесия и существует такое $N$, что множество $K_N$ компактно и положительно инвариантно. Тогда положение равновесия асимптотически устойчиво.*

## 2.2. Построение функций Ляпунова

Пусть среди функций $h_i(x)$ есть лишь $m$ попарно различных. Обозначим их $g_j(x)$, $j = 1, \dots m$. Без ограничения общности их можно считать равными нулю в положении равновесия, а множество Q, содержащее положение равновесия вместе с некоторой его окрестностью, заданным неравенствами

$$Q = \{a_{0j} \leqslant g_j(x) \leqslant b_{0j}, \quad j = 1, \dots, m\}.$$

Тогда множества $K_i$ будут заданы неравенствами

$$K_i = \{a_{ij} \leqslant g_j(x) \leqslant b_{ij}, \quad j = 1, \dots, m\}.$$

Пусть для этой последовательности выполнены условия теоремы 3, причем существует такая подпоследовательность $K_{i(k)}$, что $K_{i(m+1)}$ не пересекается с границей предыдущего множества $K_{i(m)}$.

Расширения этих множеств

$$K'_{i(k)} = \{a_{i(k)j}(x) + \delta_k \leqslant g_j(x) \leqslant b_{i(k)j} + \delta'_k, \quad j = 1, \dots, m\}$$

при достаточно малых положительных стремящихся к нулю $\delta_k$, $\delta'_k$ строго положительно инвариантны. Границы множеств $K'_{i(k)}$ не пересекаются. Это позволяет, следуя [3], построить положительно определенную функцию, производная которой будет отрицательна в точках границ множеств $K'_{i(k)}$.

## 2.3. Поведение траекторий

Известно, что локализирующие множества для инвариантных компактов системы разделяют фазовое пространство системы на области с простым и сложным поведением траекторий [4]. Это означает следующее. Вне локализирующего множества для любой траектории возможен лишь один из стандартных вариантов поведения, в то время как поведение траекторий в локализирующем множестве может иметь сложный, в частности хаотический характер [5, 6].

Предположим, что множества $K_i$, $i \geqslant 0$ нетривиальны, т.е. $K_i \neq K_{i-1}$, $K_m \neq \varnothing$. Поскольку $K_i \subset K_{i-1}$, то получаем разложение фазового пространства на непустые подмножества

$$\mathbf{R}^n = (K_0 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus K_2) \cup \dots \cup (K_{m-1} \setminus K_m) \cup K_m.$$

В точках множества $K_{i-1} \setminus K_i$ функция $\dot{h}_i$ не имеет нулей. Поэтому это множество распадается на связные компоненты I рода, где $h_i(x) > h_{i\,\sup}(K_{i-1})$, $\dot{h}_i(x) > 0$ или $h_i(x) < h_{i\,\inf}(K_{i-1})$, $\dot{h}_i(x) < 0$, и II рода, где $h_i(x) > h_{i\,\sup}(K_{i-1})$, $\dot{h}_i(x) < 0$ или $h_i(x) < h_{i\,\inf}(K_{i-1})$, $\dot{h}_i(x) > 0$.

**Теорема 4.** *Если траектория системы выходит из локализирующего множества $K_i = \Omega(\phi_i, K_{i-1})$, $i > 0$, то она попадает в компоненту I рода множества $K_{j-1} \setminus K_j$ при некотором $j \leqslant i$.*

**Теорема 5.** *Если траектория системы проходит через точку компоненты I рода множества $K_{i-1} \setminus K_i$, $i > 0$, то она в этой компоненте уходит в бесконечность при $t \to +\infty$ или она выходит в компоненту I рода множества $K_{j-1} \setminus K_j$ при некотором $j < i$, $i > 1$.*

**Теорема 6.** *Если траектория системы проходит через точку компоненты II рода множества $K_{i-1} \setminus K_i$, то возможны четыре варианта ее поведения: 1) траектория остается в компоненте и при $t \to +\infty$ уходит в бесконечность; 2) траектория остается в компоненте и при $t \to +\infty$ стремится к $\partial K_i$ — границе локализирующего множества $K_i = \Omega(\phi_i, K_{i-1})$, а ее $\omega$-предельное множество содержится в пересечении множества $\partial K_i$, границы этой компоненты и универсального сечения $S(\phi_i)$; 3) траектория покидает компоненту, переходя через ее границу в локализирующее множество $K_i$; 4) траектория покидает компоненту, переходя через ее границу в компоненту I рода множества $K_{j-1} \setminus K_j$ при некотором $j < i$, $i > 1$.*

## 2.4. Поиск скрытых аттракторов

**Теорема 7.** *Для любой функции $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R}^n)$ множество $S(\psi) \cap K_i$ имеет по крайней мере одну общую точку с любым инвариантным компактом системы.*

Для численного нахлждения скрытых аттракторов системы достаточно ограничиться при любом $i > 0$ траекториями, начинающимися в точках множества $S(\psi) \cap K_i$ и не покидающими локализирующее множество $K_i$.

Работа выполнена в рамках работ “Организация проведения научных исследований” (1.4769.2017/6.7) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-07-00269).

# Список литературы

1. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференц. уравнения, 2005. Т. 41. № 12. С. 1597–1604.
2. Крищенко А.П. Исследование асимптотической устойчивости методом локализация инвариантных компактов // Автоматика и телемеханика. 2017. № 6. С. 39-57.
3. Крищенко А.П. Построение функций Ляпунова методом локализации инвариантных компактов // Дифференц. уравнения, 2017. Т. 53, № 11. С. 1447-1462.
4. Крищенко А.П. Локализация простой и сложной динамики в нелинейных системах // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 11. С. 1440-1447.
5. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Локализирующие множества и поведение траекторий // Доклады Академии наук. 2016. Т. 470, № 2. С. 133-136.
6. Крищенко А.П. Поведение траекторий в локализирующих множествах // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480, № 4. С. 393-396.