УДК 517.911.5

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ С АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

М.В. Морозов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: miguel@ipu.ru

Ключевые слова: периодические дифференциальные включения, асимптотически устойчивые множества, малые возмущения.

Аннотация: Для решений периодических по времени однородных дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами получена оценка экспоненциального вида. Доказано, что эта оценка сохраняется при малых возмущениях рассматриваемых включений.

1. Введение

Изучение систем управления привело к использованию теории дифференциальных включений. Известно, что при довольно общих предположениях система управления с ограничениями на управление эквивалентна дифференциальному включению

(1) $\dot{x} \in F(t,x)$,

где $F(t,\mathrm{x})$ – некоторое заданное многозначное отображение, т.е. функция, которая каждому моменту времени t и каждой фазовой точке $x \in R^n$ ставит в соответствие множество $F(t,x) \in R^n$. В форме дифференциального включения (1) можно представить не только систему управления с заданными ограничениями на управление, но также различные классы других объектов. Это и системы дифференциальных неравенств, и неявные дифференциальные уравнения, и системы управления с фазовыми ограничениями, и дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.

Теория дифференциальных включений хорошо развита, см., например, обзоры [1, 2]. Однако работы, связанные с периодическими по времени дифференциальными включениями (например, [3-5]), в основном посвящены вопросам существования периодических решений. Немного работ посвящено исследованию свойств решений периодических по времени дифференциальных включений. Так, например, в [6,7] для периодического по времени дифференциального включения строится дифференциальное включение первого приближения. Доказано, что об асимптотической (или экспоненциальной) устойчивости рассматриваемого периодического дифференциального включения можно судить по наличию этих свойств у дифференциального включения первого приближения.

В работах [8-12] решались задачи об абсолютной и робастной устойчивости систем управления с периодически изменяющимися параметрами, в частности, установлено, что рассматриваемые системы управления с периодическими параметрами эквивалентны, в смысле совпадения множеств абсолютно непрерывных решений, периодическому по времени дифференциальному включению. В [13] рассмотрен ряд примеров, приводящих к системам с периодически меняющимися параметрами. Это и следящие системы, элементы которых работают на переменном токе, и системы управления с амплитудно-импульсной модуляцией, и задачи, возникающие при исследовании вибраций фрезерных станков. В [14] доказано, что решения периодических дифференциальных включений обладают в ряде случаев теми же свойствами, что и решения автономных дифференциальных включений. В [15] установлены некоторые свойства решений периодических дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами. Данная работа является продолжением [15].

2. Постановка задачи

Прежде чем сформулировать задачу приведем необходимые определения. Рассмотрим периодическое дифференциальное включение вида

(2) $$\dot{x} \in F(t,x), \quad F(t,x) \equiv F(t+T,x), \ t \ge 0, \ x \in R^n, \ T = \text{const}, \ T > 0.$$

Везде далее будем предполагать, что многозначная функция $F(t,x)$ в некоторой области $G = \{0 \le t \le T, \ x \in G_R, \ \mathrm{G_R} = \{x_0 : \|x_0\| \le R\}\}$ удовлетворяет основным условиям [16, с. 60], т.е. при всех $(t,x) \in G$ множество $F(t,x) \subset R^n$ является непустым, ограниченным, замкнутым, выпуклым и функция $F(t,x)$ полунепрерывна сверху [16, с. 52] по (t,x).

Решением включения (2) будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $x(t)$, определенную на интервале или отрезке **I**, которая почти всюду на **I** удовлетворяет (1). В силу периодичности по t многозначной функции $F(t,x)$ при исследовании свойств решений $x(t,t_0,x_0)$ включения (1) без ограничения общности можно считать, что $t_0 \in [0,T]$.

Из определения решения и периодичности по t правой части включения (2) вытекают следующие два свойства. Если функция $x(t)$ является решением включения (2) (при $\alpha < t < \beta$), то:

1) функция $x(t+kT)$ ($\alpha - kT < t < \beta - kT, \ k$ – любое целое число) также является решением включения (1) и эти решения имеют одну и ту же траекторию;

2) для любых $t_0 \in [0,T], \ t_1, \ t$ таких, что $t_0 \le t_1 \le t,$ выполнено равенство $x(t,t_1,x(t_1)) = x(t,t_0,x_0)$, где $x(t_1) = x(t_1,t_0,x_0)$.

Пусть $a \in R^n$, $b \in R^n$ точки (векторы) с координатами $a_i, b_i, \ i = \overline{1,n}$. $B \subset R^n$ – множество. Под расстоянием ρ между точками или точкой и множеством будем понимать следующие неотрицательные числа

$$\rho(a,b) = \|a-b\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2\right)^{1/2}, \ \rho(a,B) = \inf_{b\in B}(a,b).$$

Известно, что функция $\varphi(x) = \rho(x,B)$ равномерно непрерывна, для любых точек $x \in R^n$, $y \in R^n$ $|\rho(x,B) - \rho(y,B)| \le \rho(x,y)$. Замкнутой ε-окрестностью M^{ε} множества M будем называть множество таких точек *x,* что $\rho(x,\mathrm{M}) \le \varepsilon$. Пусть $M \subset G$.

Определение 1. *Множество М называется асимптотически устойчивым для включения (2), если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что для каждого* x_0, *для которого* $\rho(x_0, \mathrm{M}) \le \delta(\varepsilon)$, *существует решение с начальным условием* $x(t_0) = x_0$, *все такие решения продолжаются на интервал* $t_0 \le t < \infty$ *и удовлетворяют условиям*

$$\rho(x(t), \mathrm{M}) \le \varepsilon \text{ при } t_0 \le t < \infty,\ \rho(x(t), \mathrm{M}) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Далее будем рассматривать однородные по $x \in R^n$ дифференциальные включения. Если B – множество в R^n, c – число, то cB обозначает множество точек вида cx для всех $x \in B$.

Определение 2. *Многозначная функция* $F(t,x)$ *называется однородной (первой степени) по x, если* $F(t,cx) \equiv cF(t,x)$ *для всех* $c > 0$.

Определение 3. *Дифференциальное включение*

(3) $$\dot{x} \in F(t,x) \qquad (F(t,cx) \equiv cF(t,x),\ \ c > 0)$$

называется однородным по x.

Однородное дифференциальное включение (3) не меняется при замене $x = cx_1$ с любым $c > 0$. Это значит, что если функция $x = \varphi(t)$ – решение включения (3), то для любого $c > 0$ функция $x = c\varphi(t)$ тоже является решением.

Рассмотрим периодическое по *t* и однородное по x дифференциальное включение

(4) $$\dot{x} \in F(t,x), \quad (t \ge 0,\ x \in R^n), \quad F(t,x) \equiv F(t+T,x),\ (T = \mathrm{const},\ T > 0),$$
$$F(t,cx) \equiv cF(t,x),\ \ (c > 0).$$

Выберем произвольную точку (t,x). Введем следующие обозначения: $x^\eta = \{x_1 : \|x_1 - x\| \le \eta\}$ $(\eta > 0)$, $F(t,x^\eta) = \bigcup\limits_{x_1 \in x^\eta} F(t,x_1)$. Рассмотрим $coF(t,x^\eta)$ – выпуклую оболочку множества $F(t,x^\eta)$. Обозначим через $[coF(t,x^\eta)]^\delta$ замкнутую δ- окрестность множества $coF(t,x^\eta)$. Пусть $\eta = p\|x\|$, $\delta = q\|x\|$, где p и q – некоторые положительные параметры. Определим функцию

$$F_{pq}(t,x) = [coF(t,x^\eta)]^\delta = [coF(t,x^{p\|x\|})]^{q\|x\|} \ \ (p > 0,\ q > 0).$$

Функция F_{pq}, так же как и функция F, периодическая, однородная (первой степени) и удовлетворяет основным условиям. В качестве возмущенного будем рассматривать включение

(5) $$\dot{x} \in F_{pq}(t,x).$$

Задача состоит в получении оценки экспоненциального вида для решений периодических однородных дифференциальных включений вида (4) при наличии асимптотически устойчивого множества и доказательстве свойства сохранения этой оценки при малых возмущениях, не нарушающих периодичности и однородности рассматриваемых включений**.**

3. Основные результаты

Теорема 1. *Если ограниченное множество М асимптотически устойчиво для включения (4), то существуют такие числа* $c_0 > 0,\ c_1 > 0,$ *что для каждого решения* $x(t,t_0,x_0)$ *включения (4) при любых* t_0 *и* $t \ge t_0$ *выполнена оценка*

(6) $$\rho(x(t,t_0,x_0), M) \le c_0 \|x_0\| e^{-c_1 t} \quad (t_0 \le t < \infty).$$

Теорема 2. *Если ограниченное множество* M *асимптотически устойчиво для включения (4), то при достаточно малых* p *и* q *оно асимптотически устойчиво для включения (5). При этом постоянные* c_0, c_1 *в оценке (6) для решений включения (5) можно взять сколь угодно мало отличающимися от значения этих постоянных для включения (4), если* p *и* q *достаточно малы.*

Список литературы

1. Благодатских В.И. Некоторые результаты по теории дифференциальных включений (обзор) // In. Summer school on ordinary differential equations. Brno, 1975. P. 29-67.
2. Aubin J.-P., Cellina A. Differential inclusions. Paris: Univ. Paris IX Dauphine, 1983.
3. Поволоцкий А.И., Ганго Е.А. Существование периодических решений дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Республиканский сборник трудов «Математический анализ и теория функций». Вып. 8. М.: МОПИ им. Н.К. Крупской, 1977. С. 106-113.
4. Ирисов А.Е., Тонкова В.С., Тонков Е.Л. Периодические решения дифференциального включения // Сборник трудов «Нелинейные колебания и теория управления». Вып. 2. Ижевск: Удмуртский государственный университет, 1978. С. 3-15.
5. Macki J.W., Nistri P., Zecca P. The existence of periodic solutions to nonautonomous differential inclusions // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, No. 3. P.840-844.
6. Smirnov G.V. Weak asymptotic stability at first approximation for periodic differential inclsions // Nonlinear differential equations and applications. 1995. Vol. 2, No. 4. P. 445-461.
7. Gama R., Smirnov G.V. Weak exponential stability for time-periodic differential inclusions via first approximation averaging // Set-valued and variational analysis. 2013. Vol. 21, No. 2. P. 191-200.
8. Молчанов А.П., Морозов М.В. Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // Автоматика и телемеханика. 1992. № 2. С. 49-59.
9. Молчанов А.П., Морозов М.В. Функции Ляпунова для нелинейных нестационарных дискретных систем управления с периодической линейной частью // Автоматика и телемеханика. 1992. № 10. С. 37-45.
10. Морозов М.В. Критерии робастной абсолютной устойчивости дискретных систем управления с периодическими ограничениями // Труды ИСА РАН. 2014. Т. 64, Вып. 2. С. 13-18.
11. Молчанов А.П., Морозов М.В. Достаточные условия робастной устойчивости линейных нестацинарных систем управления с периодическими интервальными ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1997. № 1. С. 100-107.
12. Молчанов А.П., Морозов М.В. Алгоритмы анализа робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1997. № 5. С. 100-111.
13. Шильман С.В. Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.
14. Морозов М.В. О свойствах периодических дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 612-617.
15. Морозов М.В. О свойствах решений периодических по времени дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами // Труды ИСА РАН. 2017. Т. 67, Вып. 3. С. 13-19.
16. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.