УДК 517.938

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУБОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р.О. Оморов
Институт физико-технических проблем и материаловедения НАН КР
Кыргызская Республика, 720071, Бишкек, пр. Чуй, 265а
E-mail: romano_ip@list.ru

Ключевые слова: динамическая система, топологическая грубость, синергетическая система, хаос, грубость по Андронову-Понтрягину, бифуркация, максимальная грубость и минимальная негрубость систем, гиперболические и негиперболические особые точки, число обусловленности матрицы.

Аннотация: Рассматривается метод исследования грубости динамических систем, основанный на понятии грубости по Андронову-Понтрягину и именуемый «методом топологической грубости». Даны определения максимальной грубости и минимальной негрубости динамических систем. Сформулированы необходимые и достаточные условия достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости, а также возникновения бифуркаций топологических структур динамических систем. Метод может быть использован для исследований грубости и бифуркаций динамических систем, а также синергетических систем и хаоса различной физической природы. В работах автора метод апробирован на примерах многих синергетических систем, таких как аттракторы Лоренца и Ресслера, систем Белоусова-Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», Хенона, бифуркации Хопфа и др.

1. Введение

В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксото или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε– близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [1-3].

В данной статье рассматривается «метод топологической грубости», основы которого были заложены в работе [4], а дальнейшее развитие метода получило широкое применение при исследовании грубости и бифуркаций синергетических систем различной физической природы, в частности, при исследовании хаоса в этих системах [5-7].

2. Основы метода

В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А. Пуанкаре [8], в частности термин бифуркация впервые введен им и означает дословно «раздвоение» или иначе от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения. Грубость динамических систем при этом определяется, как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В современной терминологии «бифуркация» употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе. Таким образом, бифуркация означает переход между пространствами грубых систем.

Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые области (пространства). Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А. Андроновым и его школой [1, 2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерии грубости, которое впоследствии, названо понятием грубости по Андронову-Понтрягину [2].

В многомерной постановке рассматривается динамическая система (ДС) n-го порядка

(1) $\dot{z}(t) = F(z(t),$

где $z(t) \in R^n$ – вектор фазовых координат, $F - n$-мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову-Понтрягину в некоторой области G если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\widetilde{G}$, области G:

(2) $\dot{\widetilde{z}} = F(\widetilde{z}) + f(\widetilde{z}),$

являются $\varepsilon -$ тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) ε – тождественны, если существуют открытые области $D,\ \widetilde{D}$ в n-мерном фазовом пространстве также, что $D \subset \widetilde{D} \subset \widetilde{G} \subset G$

$$\exists \varepsilon, \delta > 0:$$

если $\|f(\widetilde{z})\| < \delta,\ |df_i(\widetilde{z}) / d\widetilde{z}_j| < \delta,\ i, j = \overline{1, n},$

то $|\|z\| - \|\widetilde{z}\|| < \varepsilon,$ или

(3) $(\widetilde{D}, (2)) \overset{\varepsilon}{\equiv} (D, (1)),$

иначе, разбиение областей $\widetilde{D}$ и D траекториями систем (2) и (1) ε-тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до ε).

Если (3) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову-Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типа особых точек, особых линий, замкнутых траекторий, притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [4] на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину предложены основы «метода топологической грубости» на базе меры грубости в виде числа обусловленности $C\{M\}$ – матрицы M – нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства. Здесь же, впервые введено понятие максимальной грубости и минимальной негрубости на отношениях пары δ и ε.

Определение 1. *Грубая в области G система (1) называется максимально грубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина δ – близости систем (1) и (2), приводящая к ε-тождественности, будет (для каждого ε>0) максимальна.*

Определение 2. *Негрубая в области G система (1) называется минимально негрубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина ε-тождественности систем (1) и (2), при которой еще выполняется условие грубости, будет (для каждого δ>0) минимальна.*

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости в окрестности особых точек фазового пространства определяется следующей теоремой, доказанной в работе [4].

Теорема 1. *Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки (z_0) была максимальна грубой, а в окрестности негиперболической – минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:*

$$M^* = \operatorname{argmin} C\{M\},$$

где M – матрица приведения линейной части A системы (1) в особой точке (z_0) к диагональному (квазидиагональному) базису, $C\{M\}$ – число обусловленности матрицы M.

Замечание 1. *Как следует из определений 1 и 2, а также теоремы 1, существуют и минимально грубые, и максимально негрубые системы, для которых $C\{M\} = \infty$. Иначе, множество грубых и негрубых систем образуют непрерывные множества. При этом, системами с $C\{M\} = \infty$ будут системы с жордановой квазидиагональной формой матриц линейного приближения A.*

Очевидно, число обусловленности $C\{M\}$ как меру грубости можно использовать для кусочно-гладких динамических систем, рассматривая совокупную грубость по областям гладкости системы, если особые точки не находятся на границе этих областей. Следует отметить, что для негладких систем, используя какую-либо обобщенную производную из негладкого анализа при определении матрицы линейной части, можно обобщить эту меру грубости.

Теоретические результаты «метода топологической грубости», полученные в работах [4-7], позволяют управлять грубостью синергетических систем, соответствующая теорема доказана в работе [4].

Рассматривается система

(4) $$\dot{z} = Q(z, u),$$

где $z \in R^n$, $u \in R^r$ – соответственно вектора фазовых координат и управлений системы, $Q(\cdot)$ – n-мерная нелинейная дифференцируемая вектор-функция.

Возможности управления грубостью определяются условиями следующей теоремы.

Теорема 2. *Для того, чтобы в управляемой динамической системе (4), описываемой в n-мерном фазовом пространстве с помощью матриц линейного приближения A, B соответственно для фазовых координат и управлений, существовало управление $u(t)$, обеспечивающее в окрестности соответствующей особой точки замкнутой системы максимальную грубость или минимальную негрубость, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия невырожденной разрешимости матричного уравнения Сильвестра.*

Управление $u = u(t) \in U$ ищется в классе систем с обратной связью $u = -Kx$, такое, что матрица замкнутой системы $F = A - BK$, вблизи особых траекторий, в частности особых точек, удовлетворяет условиям

$$G(F) = G(\Gamma),\ M\,\Gamma - A\,M = -BH,\ K = H\,M^{-1},$$

где $\Gamma \in R^{\,nxn}$ – диагональная (квазидиогональная) матрица состояния канонической модели, $H \in R^{mxn}$ – матрица, задаваемая произвольно с ограничением на наблюдаемость пары (Γ, H), $A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$ – матрицы координат и управления;

Вблизи особой точки:

$$F(z) = 0,\ \ \dot{z} = Az + Bu,$$

управление $u = u(t) \in U$ синтезируется так, чтобы достичь требуемого значения показателя $C\{M\}$, используя какие-либо методы нелинейного программирования.

Метод топологической грубости также позволяет определять бифуркации динамических систем на основе критериев разработанных в работах [4, 5]. Более того, метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций. В докторской диссертации автора доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы в области G многомерной (n>2) ДС при значении параметра $q = q^*$, $q \in R^p$ возникла какая-нибудь бифуркация топологической структуры, необходимо и достаточно, чтобы:*

– либо 1), в рассматриваемой области G, ДС существуют негиперболические (негрубые) особые точки (ОТ), или орбитально-неустойчивые предельные циклы (ПЦ), для которых имеет место равенство

$$C\left\{M(q^*)\right\} = \min \sum_{i=1}^{p} C_i\left\{M(q)\right\}, \qquad (5)$$

где p – количество ОТ или ПЦ в области G,

– либо 2), в области G ДС , имеются какие-либо грубые ОТ или ПЦ, для которых выполняется условие

$$C\left\{M(q^*)\right\} = \infty. \qquad (6)$$

Замечание 2. *Тип бифуркации зависит, во-первых, от того, какое из условий (5) или (6) выполняется, во-вторых, от того, какая особая траектория – ОТ или ПЦ, удовлетворяет этим условиям. Так, например, хаотические колебания («странные аттракторы»), возникающие из-за потери симметрии, происходят, когда условию (5) удовлетворяют ОТ, а хаотические колебания, возникающие через последовательности бифуркаций удвоения периода, происходят в том случае, когда условию (5) отвечают ПЦ.*

3. Заключение

Рассмотренный в данной работе «метод топологической грубости» является методом количественного исследования грубости и бифуркаций динамических систем самого широкого класса и различной физической природы. Возможности метода по исследованию грубости и бифуркаций систем были апробированы для большого количества, как синергетических систем различной природы – Лоренца, Ресслера, Чуа, Белоусова-Жаботинского, «хищник-жертва» и др., так и динамических систем более широкого класса, в частности, при исследованиях колебательных систем и бифуркаций Хопфа, в частности, при исследовании аттрактора отображения Хенона [5-7, 9-14].

Список литературы

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247-250.
2. Аносов Д.В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей. К 50-летию института (Труды .МИАН СССР.Т. 169). М.: Наука, 1985. С. 59-93.
3. Piexoto M.M. On structural stability // Ann. Math. 1959. Vol. 69, No. 1. P. 199-222.
4. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36-45.
5. Оморов Р.О. Метод топологической грубости: Теория и приложения. I. Теория // Изв. НАН КР, 2009. № 3. С. 144-148.
6. Оморов Р.О. Синергетические системы: Проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии. 1997. № 2. С. 26-36.
7. Оморов Р.О. Топологическая грубость синергетических систем // Проблемы управления и информатики. 2012. № 2. С. 5-12.

8. Пуанкаре А. О кривых определяемых дифференциальными управлениями / Пер. с франц. под ред. А.А. Андронова. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 392 с.
9. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 3-45.
10. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 335 с.
11. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 344 с.
12. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика: От тепловых двигателей до диссипативных структур / Пер. с англ. М.: Мир, 2002. 461 с.
13. Странные аттракторы. Сб. пер. с англ. / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. 253 с.
14. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 423 с.