УДК 517.977

НАХОЖДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НУЛЕВОЙ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ АФФИННЫХ СИСТЕМ

А.И. Роговский

Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, кафедра Нелинейных динамических систем и процессов управления

Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1 стр. 52, факультет ВМК

E-mail: alexander.rogovskiy@gmail.com

Ключевые слова: нулевая динамика, относительный порядок.

Аннотация: В современной теории управления часто используется понятие «нулевая динамика», а также связанные с ней объекты (относительный порядок, канонические формы, и т.д.), поэтому ее исследование является актуальной задачей. Для полного ее описания, обычно, используют так называемые уравнения нулевой динамики. Однако, найти эти уравнения удается не всегда, поскольку существующие методы решения этой задачи имеют ограниченную область применимости. В данной работе предложен новый алгоритм нахождения уравнений нулевой динамики, который применим, в частности, к некоторым системам, для которых известные ранее методы не применимы.

1. Введение.

Рассмотрим нелинейную аффинную систему управления:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum\limits_{i=1}^{l} g_i(x(t))u_i(t) \\ y_i(t) = h_i(x(t)),\ i = \overline{1,l}. \end{cases}$$

Здесь $u(t) \in \mathbb{R}^l$ обозначает вход системы, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — ее выход, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояний, $f(x)$, $g_i(x)$ — гладкие векторные поля, $h_i(x)$ — гладкие функции, $x(t_0) = x_0,\ t > t_0$; также предполагается, что $f(0) = 0, h_i(0) = 0,\ i = \overline{1,l}$. Свойства указанной системы во многом зависят от свойств ее нулевой динамики. Поэтому нулевая динамика, а также связанные с ней канонические формы, используются при решении задач стабилизации (см. [1, с. 172]), обращения (см. [2, с. 92]), наблюдения (см. [3, с. 103]) и других (см. [4]).

Задача описания нулевой динамики полностью решена для систем, имеющих векторный относительный порядок, так как они могут быть приведены к форме с выделением нулевой динамики. Однако, условия относительного порядка выполняются не всегда. Для систем, не имеющих относительного порядка, существует два подхода к описанию нулевой динамики. Первый состоит в преобразовании исходной системы так, чтобы для преобразованной условия относительного порядка выполнялись. В монографии [1, с. 249] для преобразования используется динамическая обратная связь, в работе [5] — замена входов, а в работе [6] — замена выходов. Однако, указанные методы также не всегда применимы (в частности, не применимы к необратимым системам). Другой подход состоит в построении обобщенных канонических форм с выделением нулевой динамики. Для линейных систем он использовался в работах [7,8], а для нелинейных — в работах [1, с. 310] и [9]. Наиболее общий результат представлен в статье [9], где предложен алгоритм, применимый, в частности, к некоторым необратимым системам. В данной работе мы обобщим результат из статьи [8] на нелинейный случай. Полученный алгоритм применим к некоторым системам, к которым алгоритм из [9] не применим.

2. Постановка задачи

Приведем формальное определение нулевой динамики. Из уравнений (1) следует, что фазовый вектор системы зависит от времени t, начальных условий x_0, и управления u, то есть $x = x(t, x_0, u)$, и то же верно для выхода: $y = y(t, x_0, u)$. Назовем управление $u^0_{x_0}$ *аннулирующим* (соответствующим начальным условиям x_0), если выход, соответствующий начальным условиям x_0 и управлению $u^0_{x_0}$ нулевой на всем интервале существования решения $x(t)$, то есть $y(t, x_0, u^0_{x_0}) \equiv 0$. Обозначим через X_0 множество начальных условий, для которых существует аннулирующее управление, то есть $X_0 = \{x_0 :\ \exists u^0_{x_0}\}$.

Определение 1. *Нулевой динамикой системы* (1) *называется следующее множество решений этой системы:* $Z = \{x(t, x_0, u^0_{x_0}) : x_0 \in X_0\}$.

Будем говорить, что система (1) допускает *выделение нулевой динамики* в окрестности нуля U, если существует определенный в этой окрестности диффеоморфизм $\Phi(x)$, номера $p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $q \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$ и, если $p > 0$, векторные поля $f^2(x^2)$, $g^2_1(x^2), \dots, g^2_q(x^2)$, такие, что решения уравнений

$$
(2)\qquad \begin{cases} x^1(t) \equiv 0 \\ \dot{x}^2(t) = f^2(x^2(t)) + \sum\limits_{i=1}^{q} g^2_i(x^2(t))\xi_i(t), \end{cases}
$$

где $x^2 \in \mathbb{R}^p$, обладают следующими свойствами:

- при любой непрерывной функции $\xi(t) \in \mathbb{R}^q$ и любом начальном условии x^2_0 $\Phi^{-1}(x(t))$ принадлежит нулевой динамике, где $x^T(t) = (x^{1^T}(t), x^{2^T}(t))$;
- для любого решения $x(t)$, принадлежащего нулевой динамике, существует непрерывная функция $\xi(t) \in \mathbb{R}^q$, при которой $\Phi(x(t))$ удовлетворяет системе (2).

Если система допускает выделение нулевой динамики, уравнения (2) называются уравнениями нулевой динамики. Требуется проверить, допускает ли система выделение нулевой динамики, и, если да, найти ее уравнения.

3. Нулевая динамика и относительный порядок

С нулевой динамикой тесно связано понятие относительного порядка (введенное в работе [1, с. 220]).

Определение 2. *Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^T \in \mathbb{N}^l$ называется вектором относительного порядка системы (1) в точке x_0, если*

- $L_g L_f^{r_i-1} h_i(x_0) \neq 0$, *и, если* $r_i > 1$, *то* $L_g L_f^{j-1} h_i(x) = 0$, $i = \overline{1,l}$, $j = \overline{1, r_i - 1}$ *для всех x из некоторой окрестности точки x_0;*
- *матрица*

$$H = \begin{pmatrix} L_g L_f^{r_1-1} h_1(x_0) \\ \vdots \\ L_g L_f^{r_l-1} h_l(x_0) \end{pmatrix}$$

невырождена.

Если условия относительного порядка выполнены в точке 0, то с помощью замены переменных в окрестности нуля система может быть приведена к канонической форме с выделением нулевой динамики (см. [1, с. 224]):

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_1^i = x_2^i \\ \dot{x}_2^i = x_3^i \\ \vdots \\ \dot{x}_{r_i-1}^i = x_{r_i}^i \\ \dot{x}_{r_i}^i = f^i(x) + H_i(x)u \end{cases} & i = \overline{1,l} \\ \dot{x}^0 = f^0(x) \end{cases} \tag{3}$$
$$y_i = x_1^i, \ i = \overline{1,l}.$$

Здесь $x^T = (x^{1^T}, x^{2^T}, \ldots, x^{l^T}, x^{0^T})$, $x^i \in \mathbb{R}^{r_i}$, $x^0 \in \mathbb{R}^{n-|r|}$, $|r| = r_1 + r_2 + \ldots + r_l$.

Для системы вида (3) уравнения нулевой динамики имеют вид

$$x^i \equiv 0, \ i = \overline{1,l}, \ \dot{x}^0 = \tilde{f}(x^0), \tag{4}$$

где $\tilde{f}(x^0) = f(0, 0, \ldots, 0, x^0)$. В самом деле, из $y_i \equiv 0$, согласно (3), следует, что и $x^i \equiv 0$. Подставляя нулевые значения для x^i в последнее уравнение, получим (4).

Условия относительного порядка выполняются не всегда (см., например, [2, с. 75]), поэтому для систем, не имеющих относительного порядка, в работе [1, с. 310] предложена обобщенная каноническая форма. В работе [9] предложено обобщение этой канонической формы. Однако, существуют системы, которые нельзя привести ни к одной из указанных форм.

4. Основной результат

Предлагается обобщение понятия относительного порядка и связанная с ним каноническая форма. На основании этого обобщения удается построить алгоритм нахождения уравнений нулевой динамики, применимый к некоторым системам, к которым известные методы не применимы.

Рассмотрим обобщение понятия относительного порядка.

Определение 3. *Вектор* $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l)^T \in (\mathbb{N} \cup \{-1, 0\})^l$ *называется вектором вырожденного относительного порядка в точке* x_0*, если его компоненты определяются согласно следующим правилам:*

- $\rho_i = k \geqslant 1$, *если* $L_g L_f^{k-1} h_i(x_0) \neq 0$, *и при* $k > 1$ *существует окрестность точки* x_0, *в которой* $L_g L_f^{j-1} h_i(x) = 0,\ j = \overline{1, k-1}$;
- $\rho_i = 0$ *если существует окрестность точки* x_0, *в которой* $L_g L_f^{j-1} h_i(x) = 0,\ j \in \mathbb{N}$;
- $\rho_i = -1$ *если указанные выше условия не выполняются.*

Заметим, что вектор вырожденного относительного порядка определен для любой системы (1). Если система имеет нулевой вектор вырожденного относительного порядка, уравнения нулевой динамики легко находятся (см. [10]). Если он ненулевой, систему можно привести к обобщенной канонической форме.

Теорема 1. *Пусть система имеет в нуле вектор вырожденного относительного порядка* ρ, *причем* $\exists i:\ \rho_i > 0$. *Тогда существует диффеоморфизм* Φ, *определенный в некоторой окрестности нуля* U, *а также такие невырожденные матрицы* $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^{l\times l}$, *что после замены координат* $z = \Phi(x)$, *входов* $\tilde{u} = T_1 u$ *и выходов* $\tilde{y} = T_2 y$ *в окрестности* $W = \Phi(U)$ *система принимает вид:*

$$
(5)\qquad \begin{cases} \begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \dot{z}_2^i = z_3^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{n_i-1}^i = z_{n_i}^i \\ \dot{z}_{n_i}^i = f^i(z) + \sum\limits_{j=1}^{l} g_j^i(z)\tilde{u}_j(t) \end{cases} \qquad i = \overline{1, k} \\ \dot{z}^0 = f^0(z) + \sum\limits_{j=k+1}^{l} g_j^0(z)\tilde{u}_j(t) \end{cases}
$$
$$
\tilde{y}_i = z_1^i,\ i = \overline{1, k}
$$
$$
\tilde{y}_i = h_i(z),\ i = \overline{k+1, l}.
$$

Здесь $z^T = ({z^1}^T, {z^2}^T, \dots, {z^k}^T, {z^0}^T) \in \mathbb{R}^n$, $z^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{1, k}$, *а матрица* $(g_j^i(0))_{i,j=1}^k$ *невырождена.*

Полученная каноническая форма позволяет построить алгоритм нахождения нулевой динамики исходной системы.

1. На первом шаге рассмотрим систему (1). Если она имеет вектор относительного порядка, или нулевой вектор вырожденного относительного порядка, ее нулевая динамика легко находится, поэтому в этом случае алгоритм завершается. Предположим, что она имеет вектор вырожденного относительного порядка, причем хотя бы одна его компонента положительна (иначе алгоритм завершается безрезультатно). Тогда эту систему можно привести к виду (5). Из формулы (5) следует, что если $y_i \equiv 0$, то и $z^i \equiv 0$, $i = \overline{1, k}$. Таким образом, нулевая динамика системы (5) описывается уравнениями

$$
\dot{z}^0 = \bar{f}^0(z^0) + \sum_{j=k+1}^{l} \bar{g}_j^0(z^0)\tilde{u}_j(t), \quad \bar{h}_j(z^0) \equiv 0,\ j = \overline{k+1, l},
$$

где $\bar{g}_j^0(z) = g_j^0(0, \ldots, 0, z^0)$, $\bar{f}^0(z) = f^0(0, \ldots, 0, z^0)$, $\bar{h}_j = h_j(0, \ldots, 0, z^0)$, $j = \overline{k+1, l}$. Это означает, что для того, чтобы найти нулевую динамику исходной системы, достаточно найти ее для системы

$$\dot{z}^0 = \bar{f}^0(z) + \sum_{j=1}^{l-k} \bar{\bar{g}}_j^0(z)\bar{u}_j(t), \quad \bar{y}_j = \bar{\bar{h}}_j(z) \equiv 0, \; j = \overline{1, l-k}, \tag{6}$$

где $\bar{\bar{h}}_j(z) = \bar{h}_{j+k}(z)$, $\bar{\bar{g}}_j^0(z) = \bar{g}_{j+k}^0(z)$, $\bar{y} = (\tilde{y}_{k+1}, \ldots, \tilde{y}_l)^T$, $\bar{u} = (\tilde{u}_{k+1}, \ldots, \tilde{u}_l)^T$, $j = \overline{1, l-k}$.

2. На предыдущем шаге показано, что для нахождения нулевой динамики исходной системы достаточно найти ее для системы (6). Если для нее выполнены условия относительного порядка, или вектор вырожденного относительного порядка нулевой, то ее нулевая динамика легко находится. Предположим, что для указанной системы существует вектор вырожденного относительного порядка с хотя бы одной положительной компонентой (иначе алгоритм завершается безрезультатно). Тогда с помощью замены $\xi = \Psi(z)$ ее также можно привести к форме (5), и таким образом свести задачу поиска уравнений нулевой динамики к поиску этих уравнений для системы меньшего порядка с меньшим количеством входов и выходов.

Последующие шаги делаются аналогично. На каждом шаге уменьшается размерность исследуемой системы, поэтому не более чем через l шагов алгоритм остановится. Если он завершился успешно, нулевая динамика исходной системы найдена.

Список литературы

1. Isidori A. Nonlinear control systems. London: Springer, 1995. 549 p.
2. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Методы робастного обращения динамических систем. М.: Физматлит, 2009. 223 с.
3. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
4. Isidori A. The zero dynamics of a nonlinear system: From The Origin To the latest progresses of a long successful story // Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Yantai, China, 2011. IEEE, 2011. Vol. 1. P. 18-25.
5. Schwartz C.A., Gibbens P.W., Fu M. Achieving vector relative degree for nonlinear systems with parametric uncertainties // International journal of robust and nonlinear control. 1995. Vol. 5, No. 2. P. 139-151.
6. Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И. К обобщению относительного порядка // Дифферецниальные уравнения. 2014. Т. 50, № 8. С. 1128-1132.
7. Sannuti P., Saberi A. Special coordinate basis for multivariable linear systems—finite and infinite zero structure, squaring down and decoupling // International Journal of Control. 1987. Vol. 45, No. 5. P. 1655-1704.
8. Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И. О свойствах нулевой динамики линейных систем // Дифферецниальные уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1533-1544.
9. Liu Z., Lin Z. On normal forms of nonlinear systems affine in control // IEEE Transactions on Automatic Control. 2011. Vol. 56, No. 2. P. 239-253.
10. Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И. Об уравнениях нулевой динамики некоторых аффинных нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 12. С. 1695-1709.