УДК 517.977:531.36

ЕСТЕСТВЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В.Н. Тхай

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: tkhai@ipu.ru

Ключевые слова: механическая система, малое гладкое управление, естественная стабилизация.

Аннотация: Рассматривается механическая система, подверженная действию позиционных сил и малого гладкого управления. Предполагается, что в отсутствие управления система допускает семейство одночастотных колебаний. Находится универсальное управление – нелинейная сила, посредством которой реализуется и одновременно стабилизируется цикл в системе: сила имеет аналог в природе. Приводятся примеры.

1. Введение

Рассматривается голономная механическая система, подверженная действию позиционных сил – потенциальных и неконсервативных позиционных, допускающая одночастотное колебание (периодическое движение). Периодические движения такой системы образуют семейства [1], поэтому для асимптотической устойчивости колебания необходимо приложить к системе дополнительную силу. Эта сила выступает как управление, и система становится управляемой; возникает задача стабилизации колебания управляемой механической системы.

Известно, что диссипация, задаваемая функцией Релея, доводит устойчивое равновесие консервативной системы до асимптиточеской устойчивости. Тем самым естественным образом решается задача стабилизации равновесия: в качестве управления здесь выступает линейная диссипация. Пример нелинейной диссипации, линейной по скорости, наблюдается в "мягком режиме" функционировая триода: процесс описывается известным уравнением Ван дер Поля.

В данной работе находится универсальное малое гладкое управление типа диссипации в уравнении Ван дер Поля, гарантирующее существование и стабилизацию цикла управляемой найденной силой механической системы.

Ранее изучались вопросы построения цикла путем коррекции исходной системы [2, 3], а также вводилась нелинейная диссипация в некоторых задачах [4–6].

2. Двумерные многообразия периодических движений

Пусть движение рассматриваемой механической системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода: $q = (q_1, \dots, q_n)$ – обобщенная координата. Уравнения движения инвариантны относительно замены: $(q, \dot{q}, t) \to (q, -\dot{q}, -t)$. Поэтому фазовое пространство системы симметрично относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$ обратимой механической системы (см. [1]). На периодическом движении скорость $\dot{q}$, по крайней мере, дважды обращается в нуль. Значит, необходимые и достаточные условия существования симметричного периодического движения (СПД) периода τ записываются в виде

$$\dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, \tau/2) = 0, \quad s = 1, ..., n, \tag{1}$$

где за $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$ обозначена начальная точка $q^0 \in M$.

Система уравнений (1) состоит из n уравнений с $n+1$ неизвестными. Следовательно, СПД в типичной ситуации заполняют в фазовом пространстве двумерное многообразие, которое обозначается через $\tilde{\Xi}$. Тогда соответствующее многообразие скорректированной (управляемой) механической системы будет Ξ.

3. Цикл системы

Пусть динамика на многообразии Ξ задается координатой x. Тогда с учетом действия позиционных сил и малого управления μr получается уравнение

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + \mu r(x, \dot{x}), \quad f(x, \dot{x}) = f(x, -\dot{x}) \tag{2}$$

(μr–корректирующая сила). При $\mu = 0$ уравнение допускает семейство СПД: $x = \varphi(h, t)$. Период τ на семействе СПД является функцией h: $\tau = \tau(h)$. Предполагается, что значению параметра $h = h^*$ отвечает период $\tau^* = \tau(h^*)$.

Решение уравнения (2) зависит от параметра μ: $x = x(\mu, h, t)$. Производная от функции $x(\mu, h, t)$ по μ будет решением неоднородной линейной системы с нулевыми начальными условиями. В ней необходимые и достаточные условия существования решения периода τ^* приводят к амплитудному (бифуркационному) уравнению

$$I(h) \equiv \int_0^{\tau^*} r(\varphi(h,t), \dot{\varphi}(h,t))\psi(h,t)dt = 0, \tag{3}$$

где через (θ, ψ) обозначается периодическое решение системы, сопряженной к системе уравнений в вариациях для СПД. Тогда простому корню $h = h^*$ отвечает цикл (см., например, [7]).

Уравнения в вариациях для СПД представляют собой линейную периодическую систему. После ее приведения к системе с постоянными коэффициентами каждому корню характеристического уравнения отвечает соответствующий характеристический показатель (ХП) периодической системы, обозначаемый ниже за λ.

Циклу обязательно отвечает один нулевой характеристический показатель (ХП), поэтому бифуркация ХП в точке $\mu = 0$ происходит с рождением одного действительного ХП порядка μ:

$$\lambda_1(\mu) = 0, \quad \lambda_2(\mu) = \mu\alpha + ...$$

4. Выбор управления

Функцию r в μ-малом управлении μr выберем в виде

$$r = L(1 - Kx^2)\dot{x}, \tag{4}$$

где число L равно +1 или -1, а коэффициент K определяется ниже. В этом случае амплитудное уравнение (3) записывается так:

$$\int\limits_0^{\tau^*} [1 - K\varphi^2(h,t)]\dot{\varphi}(h,t)\psi(h,t)dt = 0.$$

Вводится следующая характеристика семейства СПД, т.е. функция

$$K(h) = \frac{\int\limits_0^{\tau(h)} \sigma(h,t)dt}{\int\limits_0^{\tau(h)} \varphi^2(h,t)\sigma(h,t)dt}, \quad \sigma(h,t) = \dot{\varphi}(h,t)\psi(h,t).$$

С помощью характеристики находтся конструктивно проверяемое условие простоты корня

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh}\nu \neq 0, \quad \nu = \int\limits_0^{\tau^*} \varphi^2(h^*,t)\sigma(h^*,t)dt. \tag{5}$$

Из (5) получается, что в точках семейства СПД, в которых $dK = 0$, достаточные условия существования цикла не выполняются.

Определение 1. *Точка h семейства СПД механической системы, в которой производная от функции $K(h)$ равна нулю, называется критической.*

5. Результаты

5.1. Цикл в управляемой механической системе

Теорема 1. *Пусть механическая система допускает h-семейство СПД с характеристикой $K(h)$. Тогда при действии на систему μ-малой силы с функцией (4) цикл в управляемой системе существует для всех по характеристике $K(h)$ точек, кроме критических, при $\nu \neq 0$.*

5.2. Естественная стабилизация цикла

В результате вычислений для α получается следующая формула

$$\alpha = \frac{L}{\tau*}\frac{dK(h^*)}{dh}\int_0^{\tau^*} \varphi^2(h^*,t)\dot{\varphi}(h^*,t)\psi(h^*,t)dt. \tag{6}$$

Из формулы (6) следует, что в рамках выполнения условий теоремы 1 выбором числа L всегда добиваемся положительного знака числа α.

Таким образом, при выполнении теоремы 1 осуществляется естественная стабилизация цикла управляемой механической системы.

Теорема 2. *В рамках выполнения условий теоремы 1 осуществляется естественная стабилизация цикла управляемой механической системы.*

5.3. Система с n степенями свободы

Принимается, что Ξ отвечает обобщенная координата $q_1 = x$. Тогда в рассматриваемой механической системе с n степенями свободы цикл на Ξ также существует: для него выполнена теорема 2, а $q_2 = \ldots q_n = 0$. Следовательно, решение задачи естественной стабилизации цикла обеспечивается притяжением траекторий к Ξ.

Необходимым условием притяжения является принадлежность всех ХП СПД мнимой оси. Тогда само притяжение гарантируется действием по каждой координате q_s малой линейной по скорости силой $-\dot{q}_s$ $(s = 2, \ldots, n)$.

Теорема 3. *В случае механической системы с n степенями свободы задача естественной стабилизации цикла управляемой системы решается в рамках выполнения теоремы 1, если ХП СПД принадлежат мнимой оси.*

Замечание 1. *Используемая по координатам $q_2, \ldots, q_n$ линейная сила получается как частный случай силы (4), где положено $L = -1, x = 0$.*

5.4. Примеры

В уравнение Ван дер Поля правая часть представляет силу вида (4). В работе [6] сила (4) используется для управления математическим маятником: здесь $L = 1, dK/dh < 0, \nu > 0$. Также изучены маятниковые колебания твердого тела [8].

6. Заключение

В работе найдено универсальное малое гладкое управление – нелинейная сила, гарантирующая существование и стабилизацию цикла управляемой этой силой механической системы на двумерной многообразии. Для системы с n степенями свободы найденная сила дополняется линейной диссипацией, обеспечивающей притяжение траекторий к многообразию колебаний.

Найденная сила имеет аналог в природе. Предложенная схема стабилизации основана на природоподобной технологии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00146а).

Список литературы

1. Тхай В.Н. О поведение периода симметричных периодических движений// Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76, Вып. 4. С. 616-622.
2. Понтрягин Л.С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
3. Klimina L.A. Iterative method of construction of a bifurcation diagram of autorotation motions for a system with one degree of freedom // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, No. 030011. P. 30011-1-030011-5. DOI: 10.1063/1.5034591
4. Patidar V., Sharma A., Purohit G. Dynamical behaviour of parametrically driven Duffing and externally driven Helmholtz–Duffing oscillators under nonlinear dissipation // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 83. No. 1–2. P. 375–388.

5. Zaitsev S., Shtempluck O., Gottlieb E.B. Nonlinear damping in a micromechanical oscillator // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 67. No. 1. P. 859–883.
6. Tkhai V.N. Dissipation in the Vicinity of a Oscillation of the Mechanical System// AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, No. 030022. P. 30022-1-030022-5. DOI: 10.1063/1.5034602
7. Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 6. P. 972-979.
8. Tkhai V.N. On stabilization of pendulum type oscillations of a rigid body// Proceedings of 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). Moscow, Russia, 2018. IEEE, 2018. INSPEC Accession Number: 17932453. DOI: 10.1109/STAB.2018.8408408