УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОСРЕДСТВОМ ВНУТРЕННЕЙ ПОДВИЖНОЙ МАССЫ

Н.Ю. Наумов
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1
E-mail: nikita.naumov@phystech.edu

Ф.Л. Черноусько
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1
E-mail: chern@ipmnet.ru

Ключевые слова: Оптимальное управление, принцип максимума, робототехника.

Аннотация: Исследована задача изменения ориентации твердого тела с использованием подвижной массы, взаимодействующей с телом посредством внутренних сил. Описан подход, позволяющий вычислить параметры движения точечной массы, в результате которого твердое тело меняет свою начальную пространственную ориентацию на заданную. Для этого предлагается совершить три поворота, каждый из которых является плоским и совершается вокруг главной центральной оси инерции твердого тела. Эти повороты можно реализовать с применением как точного, так и приближенного решения соответствующей задачи оптимального быстродействия.

1. Введение

При движении робототехнических систем в агрессивных средах применение обычных внешних устройств (например, гусениц или колес) затруднено. Поэтому целесообразно конструировать такие системы без указанных движителей, используя для перемещения силы вязкого сопротивления или сухого трения. В этом случае внутри робота должны находиться массы, изменяющие свое положение относительно корпуса. Такие конструкции применяют в разнообразных устройствах, в частности, перемещающихся внутри труб [1], а также в микророботах [2,3].

Проблемы движения мобильных роботов, управляемых посредством внутренних подвижных масс, исследованы в ряде работ. Построены оптимальные движения, обеспечивающие максимальную среднюю скорость поступательного перемещения в различных средах, то есть при различных силах внешнего сопротивления. Однако эти исследования касаются, как правило, одномерных поступательных движений. Значительно более сложными являются задачи управления поворотом, в которых должны рассматриваться двумерные (плоские) и трехмерные (пространственные) движения твердого тела, содержащего подвижные массы.

При рассмотрении плоских и пространственных задач поворота может быть интересен случай, когда поворот совершается достаточно быстро, и внешние силы малы по сравнению с внутренними силами, обусловленными взаимодействием основного несущего тела с внутренними массами. В этом случае можно пренебречь внешними силами и рассматривать систему, состоящую из основного несущего тела (корпуса) и внутренней подвижной массы, как свободную от внешних силовых воздействий.

Данная постановка задачи представляет интерес также с точки зрения управления ориентацией космического аппарата, которая может осуществляться при помощи внутренних подвижных масс.

Задача оптимального по быстродействию управления плоским поворотом тела при помощи движения внутренней массы решена в работе [4] в случае, когда внутренняя масса мала по сравнению с массой тела, и в общем случае в работе [5]. В данной работе рассматривается общая трехмерная задача о пространственном повороте.

2. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела P и материальной точки Q, которая может располагаться внутри тела. Пусть масса тела с центром масс в точке C равна M, а масса материальной точки равна m. Радиус-вектор точки в декартовой системе координат $Cx_1x_2x_3$, связанной с телом, обозначим через $\boldsymbol{r}$. Предположим, что никакие внешние силы на эту систему, показанную слева на рис. 1, не действуют, и в начальный момент времени $t = 0$ она находится в покое. Тогда центр масс системы O не меняет свое положение. Кроме того, поскольку внешние силы отсутствуют, кинетический момент и импульс рассматриваемой замкнутой механической системы сохраняются и равны начальным нулевым значениям.

Из трёх указанных условий можно получить соотношение

$$M^{-1}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega} + \mu\left[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}\right] = 0, \quad \mu = m/(M+m). \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{J}$ — тензор инерции рассматриваемого твердого тела относительно его центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости твердого тела, а точкой обозначено произведение тензора на трехмерный вектор.

Рассмотрим задачу об изменении ориентации тела P в пространстве. Эту задачу можно решить, в частности, с помощью трех последовательных плоских поворотов, соответствующих углам Крылова [6], относительно главных центральных осей инерции, как показано справа на рис. 1. Следовательно, если найти решение задачи о плоском повороте твердого тела на произвольный угол путем изменения положения материальной точки, то можно построить и решение исходной пространственной задачи.

3. Решение задачи о плоском повороте

Рассмотрим декартову систему координат Cxy, находящуюся в плоскости поворота и перепишем уравнение (1) в проекции на прямую, перпендикулярную плоскости

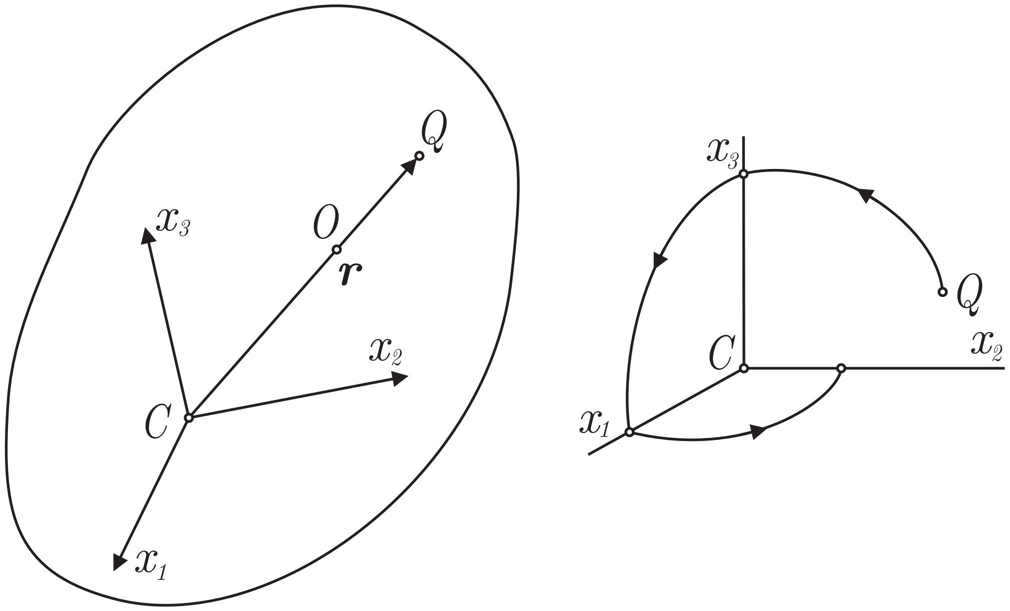

Рис. 1. Механическая система (слева) и последовательность из трех поворотов, используемая для изменения ориентации твердого тела (справа)

Cxy. Получим

$$M^{-1}I\dot{\varphi} + \mu\left[\dot{\varphi}\left(x^2+y^2\right) + xv - yu\right] = 0, \tag{2}$$

где I — главный центральный момент инерции твердого тела вокруг оси, перпендикулярной плоскости поворота, φ — угол поворота твердого тела вокруг указанной оси, x и y — координаты материальной точки в системе Cxy, u и v — проекции вектора скорости материальной точки на оси этой системы координат, причём $u^2+v^2 \leqslant V^2$.

Выполним замену переменных

$$\tilde{x} = \frac{\sqrt{\mu}}{a}x, \quad \tilde{y} = \frac{\sqrt{\mu}}{a}y, \quad \tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{V}, \quad \tilde{t} = \frac{V\sqrt{\mu}}{a}t, \tag{3}$$

где $a = \sqrt{I/M}$ — радиус инерции твердого тела вокруг оси, перпендикулярной плоскости поворота. Тогда, сохранив прежние обозначения, имеем

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{\varphi} = \frac{yu - xv}{1+x^2+y^2}, \quad u^2+v^2 \leqslant 1\,. \tag{4}$$

Необходимо решить следующую задачу.

Задача 1. *Построить управления $u(t)$ и $v(t)$, отвечающие системе (4) и обеспечивающие для любого $y(T) = y_T$ за минимальное время T выполнение граничных условий*

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad \varphi(0) = 0, \quad x(T) = 0, \quad \varphi(T) = \alpha$$

Для решения задачи 1 можно было бы воспользоваться точными формулами [5]

$$\beta_T - \beta_0 = \pm\int\limits_{\rho_0}^{\rho_T} \frac{d\rho}{\sqrt{\psi}}\,, \; \varphi_T = \mp\int\limits_{\rho_0}^{\rho_T} \frac{\rho^2\,d\rho}{(1+\rho^2)\sqrt{\psi}}\,, \; \psi = C_0\left(\frac{\rho^2\,(1+\rho^2)}{C_\beta + C_\beta\rho^2 - \rho^2}\right)^2 - \rho^2, \tag{5}$$

где ρ_0 и β_0 — полярные координаты начала, а ρ_T и β_T — конца траектории материальной точки в плоскости поворота. Однако для применения формул (5) необходимо сперва на основании граничных условий найти значения неизвестных постоянных C_0 и C_β, что связано с некоторыми трудностями.

С другой стороны, для практического применения важен случай $\mu \ll 1$, когда масса точки много меньше массы твердого тела. Тогда вместо замены переменных (3) целесообразно применить замену [4]

$$\tilde{t} = \frac{Vt}{a}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{a}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{V}, \quad z = \frac{\varphi}{\mu}$$

и, сохранив прежние обозначения, вместо (4) получить на основании (2)

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{z} = \frac{yu - xv}{1 + \mu\,(x^2 + y^2)}, \quad u^2 + v^2 \leqslant 1. \tag{6}$$

Поскольку $\mu \ll 1$, можно упростить последнее уравнение в (6) и заменить (6) системой

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{z} = yu - xv, \quad u^2 + v^2 \leqslant 1,$$

для которой и поставить задачу 1. В результате применения принципа максимума [7], как показано в [4], оптимальными траекториями оказываются дуги окружностей, нахождение параметров которых требует численного решения скалярного алгебраического уравнения, всегда имеющего единственное решение на известном интервале. При этом построенное оптимальное решение модифицируется так, чтобы точно удовлетворить всем краевым условиям при любом значении μ. При этом, однако, модифицированное решение не будет оптимальным.

На рис. 2 показаны соответствующие результаты расчета оптимального движения материальной точки для значений параметра μ, равных 0.1, 0.2 и 0.3 при различных начальных условиях.

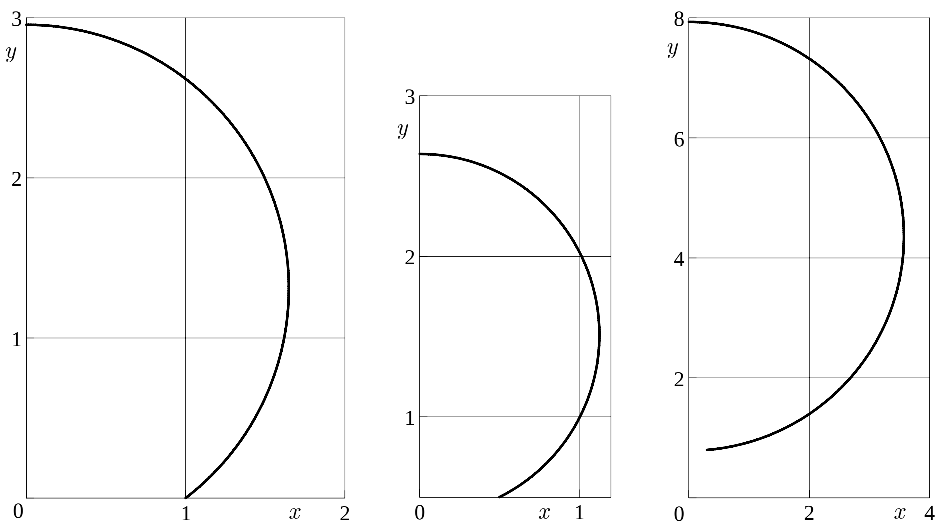

Рис. 2. Примеры оптимальных траекторий движения материальной точки в плоскости поворота

4. Заключение

Предложено решение задачи об изменении пространственной ориентации твердого тела с использованием точечной массы, взаимодействующей с телом исключительно посредством внутренних сил.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18–11–00307).

Список литературы

1. Gradetsky V., Solovtsov V., Kniazkov M., Rizzoto G.G., Amato P. Modular design of electromagnetic mechatronics microrobots // Proceedings of the 6th International Conference Climbing and Walking Robots CLAWAR. 2003. P. 651-658.
2. Schmoeckel F., Worn H. Remotely controllable mobile microrobots acting as nano positioners and intelligent tweezers in scanning electron microscopes (SEMs) // Proceedings of the IEEE International Conference Robotics and Automation. New York, 2001. P. 3903-3913.
3. Vartholomeos P., Papadopoulos E. Dynamics, design and simulation of a novel microrobotic platform employing vibration microactuators // Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control. 2006. Vol. 128, No. 1. P. 122-133.
4. Chernousko F.L. Optimal control of the motion of a two-mass system // Doklady Mathematics. 2018. Vol. 97, No. 3. P. 295-299.
5. Shmatkov A.M. Time-optimal rotation of a body by displacement of a mass point // Doklady Physics. 2018. Vol. 63, No. 8. P. 337-341.
6. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.