УДК 517.977.56

ОБ ОЦЕНИВАНИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ДИСКРЕТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Б.И Ананьев

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620990, Екатеринбург, ул. Ковалевской, 16

E-mail: abi@imm.uran.ru

Ключевые слова: неполная информация, оценивание, совместимые множества, аппроксимация, неопределенные возмущения.

Аннотация: Рассматриваются задачи нелинейного гарантированного оценивания при дискретных измерениях фазовых координат. Приведена общая рекуррентная схема оценивания, объединяющая случаи мгновенных и интегральных ограничений на возмущения. В качестве приложения общей схемы исследуется линейно-квадратичный случай. Дана аппроксимация линейной задачи оценивания с интегральными ограничениями и доказана сходимость в метрике Хаусдорфа дискретных информационных множеств к непрерывным при измельчении разбиения временного отрезка. Подобная сходимость установлена и для ряда нелинейных случаев. Рассмотрены примеры с визуализацией.

1. Введение

При решении задач управления с неполной информацией измерения координат часто происходят дискретным образом. Рассмотрим нелинейную n-векторную управляемую систему вида

(1) $$\dot{x} = \mathbf{f}(t, x, v_i), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T],$$

фазовый вектор $x(t)$ которой недоступен для измерения. В заданные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ производятся измерения

(2) $$y_i = g_i(x_{i-1}, v_i) + w_i, \quad y_i \in \mathbb{R}^m, \quad x_i = x(t_i), \quad i \in 1 : N.$$

В уравнениях (1),(2) присутствует неопределенный конечномерный параметр v_i, сохраняющий постоянное значение на полуинтервале $[t_{i-1}, t_i]$. Этот параметр входит в тройку $\{x_0, v_i, w_i\}$ неопределенных параметров, подчиненных ограничению

(3) $$F_0(x_0) + \sum_{i=1}^{N} F_i(v_i, w_i) < 1,$$

где F_i, $i \in 0 : N$, — произвольные неотрицательные и конечные функции. По данным измерений (2) требуется оценить фазовое состояние $x_N = x(T)$. Мы используем подход, восходящий к работам [1, 2] и состоящий в построении в фазовом пространстве специальных множеств, содержащих истинное состояние системы и всевозможные иные состояния, совместимые с измерениями и ограничениями. Данный подход успешно применялся при решении задач управления и коррекции движения при мгновенных и интегральных ограничениях на возмущения [3–5]. В настоящей работе рассмотрен общий подход к оцениванию, объединяющий случаи мгновенных и интегральных ограничений.

2. Совместимые и информационные множества

При сформулированных во введении предположениях и соответствующих условиях существования и продолжимости решений уравнения (1) состояния $x_i = x(t_i)$, $i \in 1 : N$, системы будут определяться многошаговыми уравнениями

$$x_i = f_i(x_{i-1}, v_i), \quad x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in 1 : N, \tag{4}$$

с измерениями (2) и ограничениями (3). Если сигнал $y_1^N = \{y_1, \dots, y_N\}$ реализовался в системе (4), (2), (3), то введём функцию $\tilde{F}(x_{i-1}, v_i) = F_i(v_i, y_i - g_i(x_{i-1}, v_i))$. Тогда ограничения (3) превратятся в ограничения для параметров $\{x_0, v_1^N\}$:

$$F_0(x_0) + \sum_{i=1}^{N} \tilde{F}_i(x_{i-1}, v_i) < 1, \tag{5}$$

причем множество параметров $\{x_0, v_1^N\}$, удовлетворяющих (5), непусто. Далее рекуррентным образом вводим множества и функции

$$\begin{gathered} \mathcal{W}_i(y) = \left\{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : V_{i-1}(x) + \tilde{F}_i(x, v) < 1\right\}, \quad \mathcal{V}_i(y) = f_i(\mathcal{W}_i(y)), \\ V_i(x_i) = \begin{cases} \inf\limits_{(x,v)\in\mathcal{W}_i(y)} \left\{V_{i-1}(x) + \tilde{F}_i(x, v) : x_i = f_i(x, v)\right\}, & x_i \in \mathcal{V}_i(y), \\ 2, & x_i \notin \mathcal{V}_i(y). \end{cases} \\ V_0(x) = F_0(x), \quad i \in 1 : N. \end{gathered} \tag{6}$$

Множества $\mathcal{W}_i(y)$ называются *совместимыми с сигналом* (ССМ) в момент i, а множества $\mathcal{V}_i(y)$ — *информационными* (ИМ) в момент i. Таким образом, ИМ $\mathcal{V}_i(y)$ являются согласно (6) образами ССМ $\mathcal{W}_i(y)$ в силу функций f_i из (4). Дальнейшие свойства введённых множеств и функций $V_i(x)$ даёт

Теорема 1. *Множества $\mathcal{W}_i(y)$ и $\mathcal{V}_i(y)$ непусты для всех $i \in 1 : N$. Функция $V_i(x_i)$ равна нижней грани функционала*

$$J_i(x_0, v_1^i, y) = F_0(x_0) + \sum_{j=1}^{i} \tilde{F}_j(x_{j-1}, v_j)$$

по всем элементам x_0, v_1^i, удовлетворяющим уравнениям (4), (2) и краевому условию $x_i = f_i(x_{i-1}, v_i)$. ИМ $\mathcal{V}_i(y)$ выражаются с помощью неравенства $\mathcal{V}_i(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : V_i(x) < 1\}$.

3. Линейно-квадратичный случай

Этот случай рассматривается в качестве приложения общей схемы. Уравнения имеют вид

(7) $$x_i = A_i x_{i-1} + B_i v_i, \quad x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in 1:N, \quad y_i = G_i x_{i-1} + C_i v_i,$$

а ограничения (5) записываются как

(8) $$|x_0|^2_{P_0^{-1}} + \sum_{i=1}^{N} |v_i|^2 < 1, \quad v_i \in \mathbb{R}^k,$$

где матрица P_0 является симметричной и положительно определённой. Символ $|x|^2_P$ означает $x'Px$, где $'$ — знак транспонирования. Таким образом, $|x|$ — евклидова норма. Дополнительно предполагается, что матрицы C_i таковы, что

(9) $$C_i C_i' > 0, \ \forall i \in 1:N.$$

Обозначим через $\mathcal{C}_i$ матрицу $(C_i C_i')^{-1}$. При предположении (9) мы получаем равенства $v_i = C_i' w_i + \mathcal{C}_i^1 q_i$ и $|v_i|^2 = |C_i' w_i|^2 + |\mathcal{C}_i^1 q_i|^2$, где $\mathcal{C}_i^1 = I_k - C_i' \mathcal{C}_i C_i$ — матрица ортогонального проектирования на подпространство $\ker C_i$ (нулевое подпространство матрицы). Из разложения получаем $w_i = \mathcal{C}_i C_i v_i$ и $q_i \in v_i + \ker \mathcal{C}_i^1$. Подставив разложение в (7), (8), находим $w_i = \mathcal{C}_i(y_i - G_i x_{i-1})$ и соотношения

(10) $$\begin{gathered} x_i = A_i x_{i-1} + B_i \left(C_i' \mathcal{C}_i (y_i - G_i x_{i-1}) + \mathcal{C}_i^1 q_i \right), \\ |x_0|^2_{P_0^{-1}} + \sum_{i=1}^{N} \left(|y_i - G_i x_{i-1}|^2_{\mathcal{C}_i} + |q_i|^2_{\mathcal{C}_i^1} \right) < 1. \end{gathered}$$

Непосредственно проверяется, что соотношения (10) эквивалентны (7), (8). Не меняя обозначений, считаем, что множества $\mathcal{W}_i(y)$ состоят из пар $(x, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. В данном случае ограничения (8) и множества из (6) оказываются выпуклыми. Используя методы выпуклого анализа, где выпуклые множества W характеризуются опорными функциями с точностью до замыкания, подсчитаем величину опорной функции для $\mathcal{V}_1(y)$, положив далее $\tilde{A}_i = A_i - B_i C_i' \mathcal{C}_i G_i$, $\tilde{B}_i = B_i \mathcal{C}_i^1$. Имеем $\rho(l|\mathcal{V}_1(y)) = \sup \left\{ l' \left(\tilde{A}_1 x_0 + B_1 C_1' \mathcal{C}_1 y_1 + \tilde{B}_1 q_1 \right) : |x_0|^2_{P_0^{-1}} + |q_1|^2_{\mathcal{C}_1^1} + |y_1 - G_1 x_0|^2_{\mathcal{C}_1} < 1 \right\}$. Введя обозначения: $\hat{P}_0 = P_0^{-1} + G_1' \mathcal{C}_1 G_1$, $\hat{x}_0 = \hat{P}_0^{-1} G_1' \mathcal{C}_1 y_1$, $h_1 = |y_1|^2_{\mathcal{C}_1} - |\hat{x}_0|^2_{\hat{P}_0} = y_1' (\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_1 G_1 \hat{P}_0^{-1} \mathcal{G}_1' \mathcal{C}_1) y_1 = y_1' (C_1 C_1' + G_1 P_0 G_1')^{-1} y_1$, получим

$$\rho(l|\mathcal{V}_1(y)) = \sup_{(x,q) \in \mathcal{W}_1(y)} \left\{ l' \left(\tilde{A}_1 x + B_1 C_1' \mathcal{C}_1 y_1 + \tilde{B}_1 q \right) \right\} = l' \check{x}_1 +$$
$$+ \sup \left\{ l' (\tilde{A}_1 x + \tilde{B}_1 q) : |x|^2_{\hat{P}_0} + |q|^2_{\mathcal{C}_1^1} < 1 - h_1 \right\} = l' \check{x}_1 + \sqrt{(1 - h_1)} |l|_{P_1},$$
$$P_1 = \tilde{A}_1 \hat{P}_0^{-1} \tilde{A}_1' + \tilde{B}_1 \tilde{B}_1', \quad \check{x}_1 = \tilde{A}_1 \hat{x}_0 + B_1 C_1' \mathcal{C}_1 y_1.$$

Для дальнейшего примем

Предположение 1. *Справедливы равенства* $\left\{ \tilde{A}_i x + \tilde{B}_i q : x \in \mathbb{R}^n, \ q \in \mathbb{R}^k \right\} = \mathbb{R}^n, \ \forall i \in 1:N.$

Из этого предположения следует невырожденность матрицы P_1 и матриц P_i, определяемых ниже. Следовательно, ИМ $\mathcal{V}_1(y)$ является внутренностью эллипсоида $\mathcal{V}_1(y) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - \check{x}_1|^2_{P_1^{-1}} < 1 - h_1\right\}$. Рассуждая по индукции, приходим к утверждению.

Теорема 2. *При предположении 1 ИМ $\mathcal{V}_i(y)$ представляют собой внутренности невырожденных эллипсоидов $\mathcal{V}_i(y) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - \check{x}_i|^2_{P_i^{-1}} < 1 - h_i\right\}$, $\check{x}_i = \tilde{A}_i\hat{x}_{i-1} + B_iC_i'\mathcal{C}_iy_i$, $i \in 1:N$, функции $V_i(x_i)$ (6) имеют вид $V_i(x_i) = \inf\limits_{(x,q)\in\mathcal{W}_i(y)} \Big\{|x - \hat{x}_{i-1}|^2_{\hat{P}_{i-1}} + |q|^2_{\mathcal{C}_i^1} + h_i : x_i = \tilde{A}_ix + \tilde{B}_iq + B_iC_i'\mathcal{C}_iy_i\Big\} = |x_i - \check{x}_i|^2_{P_i^{-1}} + h_i$. Параметры в формулах вычисляются рекуррентно:*

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}_{i-1} = \check{x}_{i-1} + \hat{P}_{i-1}^{-1}G_i'\mathcal{C}_i(y_i - G_i\check{x}_{i-1}), \quad \check{x}_0 = 0,\\
&h_i = [\check{x}_{i-1}; y_i]'(\operatorname{diag}(P_{i-1}, C_iC_i') + [I_n; G_i]P_{i-1}[I_n, G_i'])^{-1}[\check{x}_{i-1}; y_i] + h_{i-1},\\
&h_0 = 0, \quad \hat{P}_{i-1} = P_{i-1}^{-1} + G_i'\mathcal{C}_kG_i, \quad P_i = \tilde{A}_i\hat{P}_{i-1}^{-1}\tilde{A}_i' + \tilde{B}_i\tilde{B}_i', \quad i \in 1:N.
\end{aligned}
$$

В теореме используются обозначения системы MATLAB, где $[A; B]$ означает вертикальную конкатенацию матриц A и B, а $[A, B]$ — горизонтальную конкатенацию.

3.1. Дискретизация линейных систем с непрерывным временем

Линейную нестационарную систему с непрерывным временем, наблюдением и квадратичными ограничениями:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad y(t) = G(t)x(t) + w(t),\\
&|x(0)|^2_{P_0^{-1}} + \int_0^T \left(|v(t)|^2_{Q(t)} + |w(t)|^2_{R(t)}\right)dt < 1,
\end{aligned} \tag{11}
$$

можно приближенно представить с помощью формулы Коши, пошагово проинтегрировав уравнение измерения:

$$
\begin{aligned}
&x_i = A_ix_{i-1} + u_i, \quad \text{где} \quad A_i = X(t_i, t_{i-1}), \quad u_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} X(t_i, s)B(s)v(s)ds,\\
&y_i = G_ix_{i-1} + r_i + w_i, \quad \text{где} \quad G_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} G(s)X(s, t_{i-1})ds,\\
&r_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} G(s)\int_{t_{i-1}}^{s} X(s,\alpha)B(\alpha)v(\alpha)d\alpha ds, \quad w_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} w(s)ds.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Здесь $X(t,s)$ — фундаментальная матрица системы, $i \in 1:N$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ — произвольное разбиение отрезка $[0,T]$. В (11), (12) функции $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ предполагаются измеримыми. Представление (12) не является приближенным, оно описывает точные возможные значения фазового вектора $x_i = x(t_i)$.

Для определения ограничений на параметры u_i, r_i, w_i найдем опорную функцию

J всего множества параметров. Введя матрицы

$$
\begin{gathered}
\Delta_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} X(t_i,s)B(s)Q^{-1}(s)B'(s)X'(t_i,s)ds, \quad R_i^{-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} R^{-1}(s)ds, \\
\Pi_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_s^{t_i} G(\alpha)X(\alpha,s)d\alpha B(s)Q^{-1}(s)B'(s)X'(t_i,s)ds, \\
\Gamma_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_s^{t_i} G(\alpha)X(\alpha,s)d\alpha B(s)Q^{-1}(s)B'(s)\int_s^{t_i} X'(\alpha,s)G'(\alpha)d\alpha ds,
\end{gathered} \tag{13}
$$

получим $J = \sqrt{1-|x_0|^2_{P_0^{-1}}}\left(\sum_{i=1}^N (l_i'\Delta_i l_i + 2l_i'\Pi_i' p_i + p_i'\Gamma_i p_i + m_i' R_i^{-1} m_i)\right)^{1/2}$. Пусть квадратичная форма $\sum_{i=1}^N (l_i'\Delta_i l_i + 2l_i'\Pi_i' p_i + p_i'\Gamma_i p_i)$, матрицы которой задаются в (13), является положительно определенной для всякого разбиения отрезка $[0,T]$. Тогда при обозначениях $\Theta_i^{-1} = \mathrm{diag}([\Delta_i, \Pi_i'; \Pi_i, \Gamma_i], R_i^{-1})$, $v_i = \Theta_i^{1/2}[u_i; r_i; w_i]$ соотношения (12) и ограничения на возмущения примут вид

$$
\begin{aligned}
&x_i = A_i x_{i-1} + B_i v_i, \quad B_i = [I_n, O_{n\times 2m}]\Theta_i^{-1/2}, \\
&y_i = G_i x_{i-1} + C_i v_i, \quad C_i = [O_{m\times n}, I_m, I_m]\Theta_i^{-1/2}, \quad |x_0|^2_{P_0^{-1}} + \sum_{i=1}^N |v_i|^2 < 1,
\end{aligned}
$$

аналогичный (7), (8). В работе установлена сходимость в метрике Хаусдорфа дискретных информационных множеств с параметрами (12), (13) к непрерывным при измельчении разбиения временного отрезка. Подобная сходимость установлена и для ряда нелинейных случаев.

В качестве примеров рассмотрены задачи оценивания для движения плоского двухзвенного манипулятора [6, стр. 234], прямолинейного движения материальной точки в вязкой среде и модели Лотка-Вольтéрра «хищник-жертва».

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00544а).

Список литературы

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. Кощеев А.С., Куржанский А.Б. Адаптивное оценивание эволюции многошаговых систем в условиях неопределенности // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 72-93.
3. Ananyev B.I. Estimation Problems for Impulsive and Retarded Systems // AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 2025. 020001.
4. Ananyev B. A control problem for evolutionary systems with incomplete information // Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (STAB) : 14th Intern. Conf. (Pyatnitskiy's Conference), 30 May-1 June 2018, Moscow. 4 p.
5. Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф. Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Ин-т математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018. 193 с.
6. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.