УДК 62-50

ОБОБЩЕННОЕ $\mathcal{H}_2$-УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ ОБЪЕКТОМ

Р.С. Бирюков

Нижегородский государственный университет им Н.И. Лобачевского

Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: ruslan.biryukov@itmm.unn.ru

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма, минимаксный подход, конечный горизонт, внешнее возмущение.

Аннотация: На конечном горизонте рассматривается линейный непрерывно-дискретный нестационарный объект, описываемый системой дифференциальных и разностных уравнений. Вводится понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы непрерывно-дискретного объекта как индуцированной нормы линейного оператора, порожденного рассматриваемой системой. Получена ее характеризация как в терминах разностных уравнений Ляпунова, так и в терминах рекуррентных линейных матричных неравенств. Синтезированы дискретные оптимальные законы управления в виде линейных нестационарных обратных связей по состоянию, при которых обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма замкнутой системы принимает минимальное значение.

1. Введение

Современные системы управления, как правило, реализуются в цифровом виде, в то время как реальные объекты функционируют в непрерывном времени. Подобное разделение приводит к тому, что регулятор использует значения непрерывного сигнала, поступающего с объекта, лишь в дискретные моменты времени. По этой причине становится важной задача синтеза дискретного регулятора, максимально полно учитывающего поведение объекта в моменты времени между измерениями. Одним из показателей качества функционирования системы управления является максимальное отклонение целевого выхода системы от некоторого номинального значения по отношению к внешнему возмущению.

В [9] для непрерывных систем, а в [4] для дискретных, было введено понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы, как максимальное отношение максимального по времени значения евклидовой нормы выхода к L_2-норме неопределенного внешнего возмущения системы. В [1, 8, 10] были получены условия существования оптимального регулятора по выходу на бесконечном горизонте как в терминах уравнения Риккати, так и в терминах линейных матричных неравенств. В работах [2, 3] для непрерывных и дискретных систем было введено понятие максимального уклонения как естественное расширение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы на системы с ненулевым начальным состоянием.

Для непрерывно-дискретных систем на бесконечном горизонте, описываемых совокупностью дифференциальных и разностных уравнений, в [5–7] были получены оценки обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы и синтезированы законы управления, минимизирующие верхнюю оценку нормы, в терминах линейных матричных неравенств [6, 7] и в терминах дифференциальных уравнений Риккати [5].

В данной статье рассматривается непрерывно-дискретный объект с дискретным целевым выходом на конечном горизонте при нулевых начальных условиях. Следуя работам [2, 3, 9] вводится понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы как индуцированной нормы линейного оператора, порожденного рассматриваемой системой. Подобно тому как это делалось в работах [3, 9], получена ее характеризация как в терминах разностных уравнений Ляпунова, так и в терминах рекуррентных линейных матричных неравенств, что позволяет синтезировать оптимальные законы управления.

2. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма непрерывно-дискретного объекта

Рассмотрим линейный непрерывно-дискретный нестационарный объект, описываемый совокупностью дифференциальных и разностных уравнений

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_c(t)x + B_c(t)v + \Delta_c(t)\xi_k, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,\\
\xi_{k+1} &= A_{d,k}\xi_k + B_{d,k}w_k + \Delta_{d,k}x(t_k),\\
z_k &= C_{c,k}x(t_k) + C_{d,k}\xi_k,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ и $\xi_k \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ — векторы состояния непрерывной и дискретной частей системы соответственно, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ — непрерывное внешнее возмущение — ограниченная по норме пространства $L_2[t_0, t_N]$ кусочно-непрерывная справа вектор-функция, $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ — дискретное внешнее возмущение и $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ — целевой выход. Будем считать, что $x(t_0) = 0$ и $\xi_0 = 0$, а матричные функции $A_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_x \times n_v}$ и $\Delta_c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n_x \times n_\xi}$ таковы, что при выбранных возмущениях v и w_k решение системы на рассматриваемом отрезке существует и единственно.

Система (1) порождает линейный оператор $\mathcal{S}$ вида

$$
\mathcal{S} : L_2[t_0, t_N] \times l_2[0, N-1] \to l_\infty[1, N] : \big(v(t), w^{0,N-1}\big) \mapsto z^{1,N},
\tag{2}
$$

где для краткости через $w^{p,q}$ обозначена последовательность $w_p, w_{p+1}, \ldots, w_q$. В пространстве $l_\infty[1, N]$ норма вводится стандартным образом как

$$
\left\| z^{1,N} \right\|_\infty = \max_{k=1,\ldots,N} |z_k|_2,
\tag{3}
$$

а в пространстве $L_2[t_0, t_N] \times l_2[0, N-1]$ зададим норму формулой

$$
\left\| \big(v(t), w^{0,N-1}\big) \right\|_2 \triangleq \sqrt{\|v\|_2^2 + \|w\|_2^2} = \left(\int\limits_{t_0}^{t_N} |v(t)|^2 dt + \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2 \right)^{1/2}.
\tag{4}
$$

Следуя [9], назовем обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормой непрерывно-дискретного объекта (1) индуцированную норму оператора $\mathcal{S}$:

$$
\left\| \mathcal{S} \right\|_{\infty,2} = \sup_{\|v\|_2 + \|w\|_2 \neq 0} \frac{\max\limits_{k=1,\ldots,N} |z_k|_2}{\sqrt{\|v\|_2^2 + \|w\|_2^2}}.
\tag{5}
$$

В частном случае, когда система (1) содержит только дискретную часть, то есть когда $v(t) \equiv 0$ и $x_c(t) \equiv 0$, то введенная таким образом обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма совпадает с введенным в [3] максимальным уклонением выхода дискретной системы при внешнем возмущении.

Введем обозначения:

$$A_{c,k} = \Phi(t_{k+1}, t_k), \qquad \Delta_{c,k} = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)\Delta_c(s)ds, \tag{6}$$

$$B_{c,k}B_{c,k}^\top = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)B_c(s)B_c^\top(s)\Phi^\top(t_{k+1}, s)ds, \tag{7}$$

где матрица $\Phi(t, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,s) = A_c(t)\Phi(t,s), \qquad \Phi(s,s) = I.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма для непрерывно-дискретного объекта* (1) *на заданном горизонте $[t_0, t_N]$ находится как*

$$\|\mathcal{S}\|_{\infty,2} = \max_{k=1,\ldots,N} \lambda_{\max}^{1/2}(\widehat{C}_k P_k \widehat{C}_k^\top), \qquad \widehat{C}_k = (C_{c,k},\, C_{d,k}), \tag{8}$$

здесь через $\lambda_{\max}(\cdot)$ обозначено максимальное собственное значение соответствующей матрицы, $P_k = P_k^\top \geqslant 0$ — решение разностного уравнения Ляпунова

$$P_{k+1} = \widehat{A}_k P_k \widehat{A}_k^\top + \widehat{Q}_k, \qquad \widehat{A}_k = \begin{pmatrix} A_{c,k} & \Delta_{c,k} \\ \Delta_{d,k} & A_{d,k} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{Q}_k = \begin{pmatrix} B_{c,k}B_{c,k}^\top & 0 \\ 0 & B_{d,k}B_{d,k}^\top \end{pmatrix}, \tag{9}$$

с начальными условиями $P_0 = 0$.

Для решения задачи синтеза в следующем разделе, переформулируем теорему 1 в терминах линейных матричных неравенств, через $\star$ обозначен соответствующий симметрический блок.

Теорема 2. *Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма для непрерывно-дискретного объекта* (1) *на заданном горизонте $[t_0, t_N]$ может быть вычислена как $\|\mathcal{S}\|_{\infty,2}^2 = \inf \gamma^2$, при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами:*

$$\begin{pmatrix} Y_k & \star & \star \\ \widehat{A}_k Y_k & Y_{k+1} & \star \\ 0 & \widehat{B}_k^\top & I \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad k = 0, \ldots, N-1, \tag{10a}$$

$$\begin{pmatrix} Y_k & \star \\ \widehat{C}_k Y_k & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad k = 0, \ldots, N, \tag{10b}$$

при этом $Y_0 = 0$ и $\widehat{Q}_k = \widehat{B}_k \widehat{B}_k^\top$.

3. Синтез обобщенного $\mathcal{H}_2$-управления

Пусть линейный управляемый непрерывно-дискретный объект имеет вид

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_c(t)x + \Delta_c(t)\xi_k + B_c(t)v + H_c(t)u_k, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1,\\
\xi_{k+1} &= A_{d,k}\xi_k + \Delta_{d,k}x(t_k) + B_{d,k}w_k + H_{d,k}u_k,\\
z_k &= C_{c,k}x(t_k) + C_{d,k}\xi_k + D_k u_k,
\end{aligned} \tag{11}
$$

где $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управление, а остальные переменные имеют тот же смысл, что и ранее. Поставим задачу синтеза на конечном интервале времени $[t_0, t_N]$ управления в виде нестационарной линейной обратной связи по состоянию

$$
u_k = \Theta_{c,k}x(t_k) + \Theta_{d,k}\xi_k, \qquad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1, \tag{12}
$$

которое обеспечивает минимальное значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы. В дальнейшем такое управление будем называть оптимальным обобщенным $\mathcal{H}_2$-управлением.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Параметры оптимального обобщенного $\mathcal{H}_2$-регулятора вида (12) для непрерывно-дискретного объекта (11) находятся как $\Theta_k = \big(\Theta_{c,k},\ \Theta_{d,k}\big) = Z_k Y_k^{-1}$, где матрицы $Y_k = Y_k^\top \geqslant 0$ и Z_k являются решением задачи $\inf \gamma^2$ при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами:*

$$
\begin{pmatrix} Y_k & \star & \star \\ \widehat{A}_k Y_k + \widehat{H}_k Z_k & Y_{k+1} & \star \\ 0 & \widehat{B}_k^\top & I \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad k = 0, \dots, N-1, \tag{13a}
$$

$$
\begin{pmatrix} Y_k & \star \\ \widehat{C}_k Y_k + D_k Z_k & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad k = 0, \dots, N, \tag{13b}
$$

в которых $Y_0 = 0$ и

$$
\widehat{H}_k = \begin{pmatrix} H_{c,k} \\ H_{d,k} \end{pmatrix}, \qquad H_{c,k} = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) H_c(s) ds.
$$

4. Заключение

В работе для линейных непрерывно-дискретных нестационарных объектов с дискретным целевым выходом введено понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы, как максимального отношения максимального по времени значения евклидовой нормы выхода к L_2-норме неопределенного внешнего возмущения системы. Показано, что вычисление обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы сводится к решению задачи полуопределенного программирования. Это позволило решить задачу синтеза оптимальных законов управления в классе линейных нестационарных обратных связей по состоянию, которые в условиях неопределенности относительно внешнего возмущения обеспечивают минимально возможное значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-41-520002, 19-01-00289).

Список литературы

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное по Парето обобщенное $\mathcal{H}_2$-управление и задачи виброзащиты // Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 76-90.
2. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы // Автоматика и телемеханика. 2018. (Представлена)
3. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // Автоматика и телемеханика. 2019. (Представлена)
4. Chellabonia V., Haddad W.M., Bernstein D.S., Wilson D.A. Induced convolution operator norms for discrete-time linear systems // Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control. 1999. P. 487-492.
5. Khargonekar P.P., Sivashankar N. $\mathcal{H}_2$ optimal control for sampled-data systems // Systems Control Lett. 1991. Vol. 17, No. 6. P. 425-436.
6. Kim J.H., Hagiwara T. Extensive theoretical/numerical comparative studies on $\mathcal{H}_2$ and generalized $\mathcal{H}_2$ norms in sampled-data systems // Internat. J. Control. 2017. Vol. 90, No. 11. P. 2538-2553.
7. Kim J.H., Hagiwara T. Upper/lower bounds of generalized $\mathcal{H}_2$ norms in sampled-data systems with convergence rate analysis and discretization viewpoint // Systems Control Letters. 2017. Vol. 107. P. 28-35.
8. Rotea M.A. The generalized $\mathcal{H}_2$ control problem // Automatica. 1993. Vol. 29, No. 2. P. 373-385.
9. Wilson D.A. Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. Vol. 34. P. 94-97.
10. Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D. An LQR weight selection approach to the discrete generalized $\mathcal{H}_2$ control problem // International Journal Control. 1998. Vol. 71, No. 1. P. 93-101.