

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ СГЛАЖИВАЮЩИХ В-СПЛАЙНОВ С АДАПТИВНЫМ ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ПАРАМЕТРА СГЛАЖИВАНИЯ

Д.А. Кошаев

*АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»,
Россия, 197046, Санкт-Петербург, ул. Малая Посадская, д. 30
Университет ИТМО,
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д. 49
E-mail: dkoshaev@yandex.ru*

Ключевые слова: сглаживающий сплайн, В-сплайн, стохастическое оценивание.

Аннотация: Предложен рекуррентный метод построения сглаживающих кубических В-сплайнов со штрафом на вторую производную, который предусматривает адаптивное настраивание параметра сглаживания на основе апостериорных вероятностей его предполагаемых значений. Представлены результаты применения метода к угломерным данным двухантенного ГЛОНАСС/GPS-приемника при полете на дирижабле.

1. Введение

Сглаживающие сплайны целесообразно применять при постобработке измерений процессов, не поддающихся описанию в виде стохастических уравнений формирующего фильтра, но о гладкости которых есть некоторые представления. Теория сглаживающих сплайнов значительно проработана, но в ней еще остается место для новых результатов. Так, актуальной видится разработка рекуррентного метода построения сплайна, который, в отличие от [1, 2], не требует предварительного расчета моделей на всем интервале решения. Этот метод нужен для оперативной отбраковки значений параметра сглаживания без полного построения сплайна. Для выбора параметра сглаживания разработаны методы обобщенной перекрестной проверки, несмещенного риска, обобщенной функции правдоподобия [2-7], но эту задачу еще не рассматривали с точки зрения апостериорных вероятностей гипотез о значении параметра. Кроме того, существующие методы позволяют выбрать лишь постоянный параметр сглаживания.

2. Рекуррентное оценивание коэффициентов сглаживающего сплайна с известным параметром сглаживания

Для времени $t \in [t_0; t_n]$ рассмотрим кубический В-сплайн [8]
 $s(t) = \sum_{k=1}^{n+3} \beta_k B(t | t_{k-4}, \dots, t_k)$, в котором $B(t | t_{k-4}, \dots, t_k)$ – базисные кубические сплай-

ны, t_k – заданные узлы, причем $t_{-3}=t_{-2}=t_{-1}=t_0$, $t_n=t_{n+1}=t_{n+2}=t_{n+3}$, $t_k=t_{k-1}+\Delta t_k$, $\Delta t_k > 0$, $k=\overline{1, n}$, $\beta_k, k=\overline{1, n+3}$ – неизвестные коэффициенты. Для моментов $t_k, k=\overline{0, n}$ имеются скалярные измерения $y_k = s_k + v_k$, где $s_k = s(t_k)$, v_k – центрированная гауссовская белая шумная помеха с известной дисперсией $r_k > 0$. Ставится задача, найти коэффициенты $\beta_k, k=\overline{1, n+3}$ сплайна $s(t)$, минимизирующие критерий [4, 5, 8]

$$(1) \quad J = \sum_{k=0}^n (y_k - s_k)^2 / r_k + \int_{t_0}^{t_n} \lambda(t) \ddot{s}(t)^2 dt,$$

где $\lambda(t)$ – заданный параметр сглаживания, принимающий на интервалах $[t_{k-1}; t_k), k=\overline{1, n}$ в общем случае различные постоянные положительные значения λ_k .

Компромиссный критерий (1), с одной стороны, накладывает штраф на отклонение узловых значений сплайна s_k от измерений y_k , а с другой – «наказывает» за негладкость сплайна. Такой сплайн называется сглаживающим.

Для определения коэффициентов сплайна предлагается рекуррентный алгоритм, основанный на представлении интеграла в (1) и $s_k = s(t_k)$, $\ddot{s}_k = \ddot{s}(t_k)$ в виде

$$(2) \quad \int_{t_0}^{t_n} \lambda(t) \ddot{s}(t)^2 dt = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \lambda_k \Delta t_k \begin{pmatrix} \ddot{s}_{k-1} & \ddot{s}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{s}_{k-1} \\ \ddot{s}_k \end{pmatrix},$$

$$(3) \quad s_0 = \beta_1, \quad s_k = C_k^1 \beta_{k+1} + C_k^2 \beta_{k+2} + C_k^3 \beta_{k+3} \quad \text{при } 1 \leq k \leq n-1, \quad s_n = \beta_{n+3},$$

$$(4) \quad \ddot{s}_k = D_k^1 \beta_{k+1} + D_k^2 \beta_{k+2} + D_k^3 \beta_{k+3}.$$

Выражения для параметров $C_k^l, D_k^l, l=1, 2, 3$ достаточно громоздки. Они вытекают из рекуррентного алгоритма Кокса де Бура для определения базисных сплайнов.

Пользуясь (2)-(4), можно показать, что исходная задача минимизации (1) сводится к задаче оптимального стохастического сглаживания вектора состояния $b_k = (\beta_k, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \beta_{k+3})^T$, $k=\overline{1, n}$ на закрепленном интервале. Она решается с использованием фильтра Калмана (ФК), обрабатывающего измерения в прямом времени, и уравнений Рауха-Тюнга-Штрибеля [9], решаемых в обратном времени с применением сохраненных на каждом шаге результатов ФК. Ниже приводится описание ФК, предполагающее, что искомым сплайн является натуральным, т.е. $\ddot{s}_0 = \ddot{s}_n = 0$.

В качестве обратной априорной ковариационной матрицы вектора b_1 здесь выступает

$$\tilde{P}_1^{-1} = \frac{\lambda_1 \Delta t_1}{6} D_{01}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} D_{01}, \quad \text{где } D_{01} = \begin{pmatrix} D_0^1 & D_0^2 & D_0^3 & 0 \\ 0 & D_1^1 & D_1^2 & D_1^3 \end{pmatrix}. \quad \text{Априорная оценка}$$

вектора b_1 нулевая. При $k=1$ выполняется обработка двумерного вектора измерений

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1^1 & C_1^2 & C_1^3 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \text{и формального измерения } y_1^* = (D_0^1 \quad D_0^2 \quad D_0^3 \quad 0) b_1.$$

Динамика вектора состояния для $k=\overline{2, n}$ описывается уравнением

$$b_k = \left(\begin{array}{c|c} \text{O}_{3 \times 1} & E_{3 \times 3} \\ \hline 0 & -(2D_{k-1}^1 \quad D_k^1 + 2D_{k-1}^2 \quad D_k^2 + 2D_{k-1}^3) / D_k^3 \end{array} \right) b_{k-1} + \begin{pmatrix} \text{O}_{3 \times 1} \\ w_k \end{pmatrix}, \quad \text{в котором } w_k -$$

центрированный гауссовский белый шум с дисперсией $q_k = 12 / [\lambda_k \Delta t_k (D_k^3)^2]$. При

$k \geq 2$ помимо реально существующих измерений $y_k = (0 \quad C_k^1 \quad C_k^2 \quad C_k^3) b_k + v_k$ для

$k = \overline{2, n-1}$ и $y_n = (0 \ 0 \ 0 \ 1)b_n + v_n$ обрабатываются формальные измерения $y_k^* = (0 \ D_k^1 \ D_k^2 \ D_k^3)b_k + v_k^*$, где v_k^* для $k = \overline{2, n-1}$ считается некоррелированным с w_k центрированным гауссовским белым шумом с дисперсией $r_k^* = 4/(\lambda_k \Delta t_k)$, а $v_n^* = 0$. В уравнении для оценки фильтрации при всех $k = \overline{1, n}$ используется $y_k^* = 0$.

Оценка значения сплайна $s(t)$ и дисперсия ее ошибки для $t \in [t_{k-1}; t_k]$, $k = \overline{1, n}$ определяются как $\hat{s}(t) = \overline{B}_k(t)\hat{b}_k$, $\sigma_s^2(t) = \overline{B}_k(t)P_k\overline{B}_k^T(t)$, где \hat{b}_k , P_k - оценка сглаживания вектора b_k коэффициентов сплайна и ковариационная матрица ее погрешности, $\overline{B}_k(t) = [B(t|t_{k-4}, \dots, t_k), B(t|t_{k-3}, \dots, t_{k+1}), B(t|t_{k-2}, \dots, t_{k+2}), B(t|t_{k-1}, \dots, t_{k+3})]$.

Достоинством представленного решения перед другими методами построения сглаживающих сплайнов на основе ФК [1, 2] является то, что здесь не нужно заранее рассчитывать модели для всех моментов времени. Если требуется получить множество пробных решений с различными λ_k , указанная особенность позволяет существенно сократить вычислительные затраты, прерывая реализации ФК с «неудачными» λ_k .

3. Многоальтернативное оценивание коэффициентов сглаживающего сплайна с неизвестным параметром сглаживания

Пусть теперь значения параметра сглаживания λ_k заранее не определены. Возникает задача адаптивного оценивания коэффициентов сплайна, которая может быть решена методом многоальтернативного оценивания [10, 11] с применением банка ФК на основе представленных выше выражений для гипотез $\lambda_k = \lambda_k^i$, $i = \overline{1, N}$, где i - номер гипотезы. Здесь невязки измерений y_k и их дисперсии, полученные ФК, используются для определения апостериорных вероятностей гипотез p_k^i . В ходе решения от гипотез, для которых p_k^i не превышает заданный порог, вместе с соответствующими ФК можно отказаться, т.е. постепенно уменьшать N . Такая отбраковка ускоряет получение решения, тем более что оно, как уже отмечалось, в отличие от известных рекуррентных аналогов, не требует предварительного вычисления моделей для ФК на всех n шагах.

В случае постоянного параметра сглаживания метод многоальтернативного оценивания реализуется достаточно легко. Трудности возникают, когда он может изменяться. В такой ситуации при «лобовом» многоальтернативном решении общее число гипотез чрезмерно разрастается. Чтобы обойти эту проблему, разработан итерационный метод, блок-схема которого представлена на рис. 1. Здесь на каждой j -й итерации выполняется многоальтернативная фильтрация аддитивной поправки $\delta\lambda$ к параметру сглаживания, сначала в предположении, что она постоянна. Вычисляются средневзвешенные по заданному набору $\delta\lambda^i$ оценки $\delta\hat{\lambda}_{k \rightarrow}$, $\delta\hat{\lambda}_{k \leftarrow}$ в прямом и в обратном времени. Затем допускается, что $\delta\lambda(t)$ - квазидетерминированная функция, а $\delta\hat{\lambda}_{k \rightarrow}$, $\delta\hat{\lambda}_{k \leftarrow}$ - это, в некотором приближении, осредненные на интервалах $[t_0; t_k]$ и $[t_k; t_n]$ значения $\delta\lambda(t)$. Иско-

для из этого определяется оценка $\delta \hat{\lambda}_k$, которая уточняет базовую оценку $\hat{\lambda}_k$. Далее выстраиваются гипотезы $\lambda_k^i = \hat{\lambda}_k + \delta \lambda^i$ о значениях λ_k для следующей итерации.



Рис. 1. Блок-схема оценивания сглаживающего сплайна с адаптивным определением параметра сглаживания.

Для апробации представленного решения с его помощью в камеральном режиме были определены сглаживающие сплайны для измерений курса и тангажа дирижабля Au-30, НПО «Авгурь - РосАэроСистемы» [12]. Измерения углов получены с использованием двухантенного, L1/L2, ГЛОНАСС/GPS-приемника NovAtel SE-D [13] на частоте 10Гц при длине антенной базы 3,3м. Погрешности измерений имеют преимущественно флуктуационный характер. Их среднеквадратические значения известны из сообщений приемника и составляют 0,1-0,15град. Использовались реализации измерений длительностью 1ч 51мин. Дирижабль совершал нерегулярные колебания и маневр по курсу. Сглаживание измерений углов может потребоваться, например, для уточнения ориентации объектива фотокамеры, используемой при выполнении аэрофотосъемки.

На рис. 2 показаны результаты оценивания параметра сглаживания λ . Видно, что на 1-й итерации оценки $\delta \hat{\lambda}_{\rightarrow}, \delta \hat{\lambda}_{\leftarrow}$, полученные в прямом и обратном времени в предположении о постоянстве $\lambda = \delta \lambda$, – это равенство справедливо для 1-й итерации, – нестабильны и явно противоречат своим доверительными интервалами. Это происходит в силу реальной изменчивости λ . Зато на 7-й итерации $\delta \hat{\lambda}_{\rightarrow}, \delta \hat{\lambda}_{\leftarrow}$ демонстрируют быстро затухающие вблизи нуля колебания и согласованность с доверительными интерва-

лами, что говорит о достоверности базовой оценки $\hat{\lambda}$, формируемой с учетом временной изменчивости λ . Сопоставимость уровня и сходство в поведении финальных значений $\hat{\lambda}$ для измерений курса и тангажа также служит косвенным подтверждением адекватности оценивания λ .

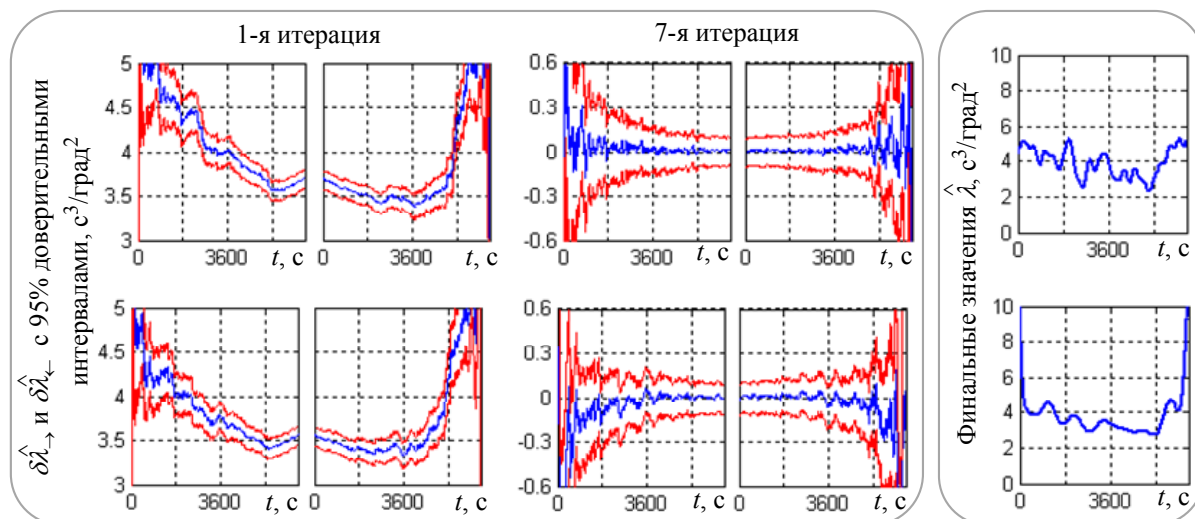


Рис. 2. Результаты оценивания параметра сглаживания для измерений курса (сверху) и тангажа (снизу).

4. Заключение

Предложенный метод может использоваться для постобработки навигационных, угломерных и гравиметрических данных при отсутствии для них стохастических моделей в виде уравнений формирующего фильтра. Отличительными особенностями метода являются отсутствие потребности в предварительном вычислении моделей для всех шагов решения, выбор параметра сглаживания с учетом его возможной изменчивости на основе апостериорных вероятностей гипотез о величине параметра.

Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 18-08-01101 А.

Список литературы

1. Weinert H.L., Byrd R.H., Sidhu G.S. A Stochastic Framework for Recursive Computation of Spline Functions - Part II, Smoothing Splines // Journal of Optimization Theory and Applications: 1980. Vol. 30, No. 2. P. 255-268.
2. Kohn R., Ansley C.F. A new algorithm for spline smoothing based on smoothing a stochastic process. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1987. Vol. 8, No. 1. P. 33-48.
3. Wahba G. Spline Models for Observational Data. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1990.
4. Gu C. Smoothing Spline ANOVA Models. New York: Springer, 2002.
5. Eggermont P.P.B. LaRiccia V.N. Maximum Penalized Likelihood Estimation. Volume II: Regression. Dordrecht. Heidelberg. London. New York: Springer, 2009.
6. Wang Y. Smoothing splines. Methods and applications. Santa Barbara. California: Chapman and Hall/CRC, 2011.
7. Lukas M.A., de Hoog F.R., Anderssen R.S. Practical use of robust GCV and modified GCV for spline smoothing // Computational Statistics. 2016. Vol. 31, No. 1. P. 269-289.
8. Квасов Б. И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2006.

9. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973.
10. Лайниотис Д.Г. Разделение - единый метод построения адаптивных систем. I Оценивание // Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1976. Т. 64, № 8. С. 8-27.
11. Дмитриев С.П., Степанов О.А. Многоальтернативная фильтрация в задачах обработки навигационной информации // Радиотехника. 2004. № 7. С. 11-17.
12. <http://rosaerosystems.ru/airships/obj676>.
13. <http://www.novatel.com/assets/Documents/Papers/SPAN-SE.pdf>.