

УДК 621.396.969

# ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА БАЗОВЫХ ЛИНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Л.Б. Рапопорт**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [LBRapoport@gmail.com](mailto:LBRapoport@gmail.com)

**Т.А. Тормагов**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [tormagov@phystech.edu](mailto:tormagov@phystech.edu)

**Ключевые слова:** спутниковая навигация, задача Wahba, базовая линия, полупределенное программирование, число обусловленности матрицы.

**Аннотация:** Рассматривается метод определения ориентации твердого тела с помощью методов GNSS (Global Navigation Satellite Systems) навигации. На твердом теле размещены навигационные антенны, принимающие спутниковые сигналы. Антенны подключены к навигационному приемнику, определяющему векторы между антеннами (базовыми линиями) в системе координат, связанной с локальным горизонтом. Сравнение с теми же векторами, определенными в системе координат, связанной с телом, позволяет определить ориентацию тела относительно локального горизонта. Если имеется  $n$  антенн, то без учета ориентации можно выбрать  $m = n(n - 1)/2$  базовых линий. Векторы, соединяющие антенну  $A_i$  с  $A_j$  и антенну  $A_j$  с  $A_i$ , отождествляются. Минимально возможное количество векторов, при которых используются все антенны, равно  $n - 1$ . В данной работе рассматривается задача такого выбора  $n - 1$  векторов из  $m$  возможных, при котором достигается максимальная точность.

## 1. Введение

На твердом теле закреплено  $n$  навигационных антенн, обозначенных через  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . На рис. 1 изображен пример расположения четырех антенн на фюзеляже БПЛА. Определение ориентации с помощью методов спутниковой навигации рассмотрено, например, в [1, 2]. Выделим  $n - 1$  базовых линий одним из множества способов. Для краткости базовую линию, соединяющую антенны  $A_i$  и  $A_j$  будем обозначать  $(i, j)$ . Множество пар  $E = \{(i, j)\}$ , выбранных для обработки, образуют ребра неориентированного графа  $G(E, V)$ , где  $|E| = n - 1$ ,  $V = \{A_1, \dots, A_n\}$ . Граф  $G$  является подграфом полного графа  $\bar{G} = (\bar{E}, V)$ ,  $|\bar{E}| = n(n - 1)/2$ . Для каждого ребра решается задача относительной навигации [3] для определения базовой линии. Для определенности для каждой пары антенна  $A_i$  служит подвижной базовой антенной

при решении задачи об определении базовой линии если  $i < j$ . В противном случае подвижной базой будет антенна  $A_j$ .

С Землей связана локальная система координат. Первая ось локального горизонта касательна к геоиду в некоторой выделенной точке тела и направлена на север. Вторая ось также касательна к геоиду и направлена на восток. Третья ось ортогональна первым двум и направлена вниз. В результате решения задач относительной навигации получим базовые линии  $(i, j) \in E$ , выраженные в координатах локального горизонта. Пусть матрица  $X$  размера  $3 \times (n - 1)$  образована из этих векторов, записанных по столбцам. С твердым телом связана система координат, носящая название связанной. Ее оси определены на рис. 1. Те же векторы, но выраженные в координатах связанной системы образуют матрицу  $X_0$ . Ортогональная матрица, пе-

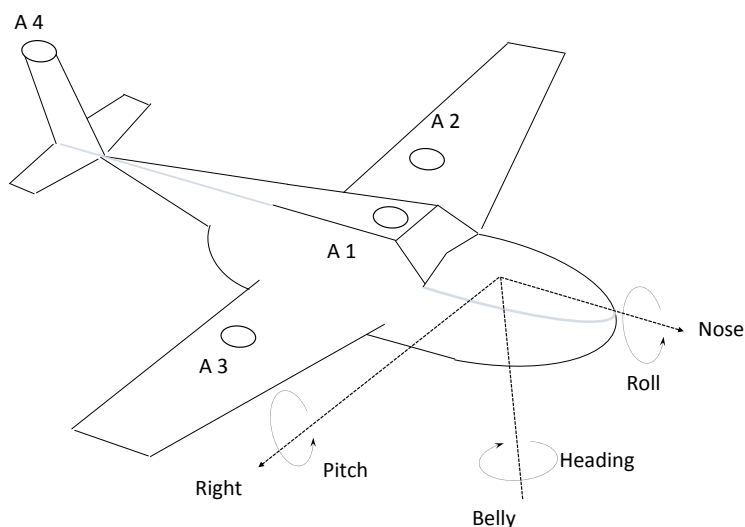


Рис. 1. Определение связанной системы координат и углов ориентации

реводящая матрицу  $X_0$  в  $X$ , называется матрицей ориентации и обозначается  $Q$ . Матрица  $Q$  выражается через углы Эйлера, определенные на рисунке.

Таким образом, вычисления, проводимые обычно в реальном времени, разделяются на три этапа. На первом этапе выделяется множество  $E$ . На втором этапе решаются задачи относительной навигации. На третьем этапе определяется матрица ориентации  $Q$ .

## 2. Определение ориентации. Метод Wahba

Далее символ  $I$  будет обозначать единичную матрицу нужного размера. Для двух квадратных матриц  $M$  и  $N$  одинакового размера определяется скалярное произведение выражением  $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^T N) = \text{tr}(N^T M)$ , где символ  $\text{tr}(\cdot)$  означает след матрицы. Выражение  $\langle M, M \rangle = \|M\|_F^2$  определяет квадрат нормы Фробениуса матрицы  $M$ . Матрица  $Q$ , доставляющая минимум выражению  $\|QX_0 - X\|_F^2$ , есть решение задачи Wahba. Раскрывая скобки, получим  $\|QX_0 - X\|_F^2 = \text{tr}(X_0^T Q^T Q X_0) - 2\text{tr}(X_0^T Q^T X) + \text{tr}(X^T X)$ . Принимая во внимание, что матрица  $Q$  ортогональна и тот факт, что под знаком  $\text{tr}(\cdot)$  в произведении матриц сомножители можно менять ме-

стами, получим, что задача Wahba равносильна максимизации следа матрицы

$$(1) \quad \operatorname{tr}(XX_0^T Q^T) \rightarrow \max_{QQ^T=I}.$$

Матрица  $XX_0^T$  имеет размер  $3 \times 3$ . Согласно методу [1, 2] вычислим SVD-разложение  $XX_0^T = U\Sigma V$ , где матрицы  $U$  и  $V$  ортогональны, а диагональная матрица  $\Sigma$  составлена из сингулярных чисел матрицы  $XX_0^T$ . Тогда оптимальная оценка матрицы  $Q$ , обеспечивающая максимум выражения (1), определяется условием  $\operatorname{tr}(XX_0^T Q^T) = \operatorname{tr}(U\Sigma V Q^T) = \operatorname{tr}(\Sigma V Q^T U) \rightarrow \max_{QQ^T=I}$  или  $VQ^T U = I$ , что дает  $Q = UV$ . Таким образом решается задача Wahba с помощью SVD-разложения. Для каждого нового момента времени требуется вычисление SVD-разложения.

Итак, для каждого момента времени векторы базовых линий  $(i, j) \in E$  определяются в ходе решения  $n - 1$  задач относительной навигации. Затем задача Wahba решается описанным выше методом. Открытым остался вопрос о том каким образом определяются ребра  $(i, j)$ . Неединственность определения подграфа выбранных базовых линий  $G \subset \bar{G}$  открывает возможность для оптимизации. Точность определения ориентации зависит от точности решения задачи относительной ориентации и от обусловленности матрицы  $XX_0^T$ . Последняя тем лучше, чем лучше обусловленность матрицы  $X_0 X_0^T$ . Данная работа посвящена оптимальному выбору  $G \subset \bar{G}$ , обеспечивающему наилучшую обусловленность указанной матрицы.

### 3. Выбор подграфа $G \subset \bar{G}$

Пусть  $Y$  – это матрица размера  $3 \times m$  ( $m = (n - 1)n/2$ ), составленная из всевозможных базовых линий в связанной системе координат. Ребра полного графа пронумеруем от 1 до  $m$  так, чтобы каждому номеру  $k = 1, \dots, m$  отвечала пара  $(i_k, j_k)$ ,  $1 \leq i_k < j_k \leq n$ . Определим бинарные переменные  $s_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  равные 1, если  $(i_k, j_k) \in E$  и 0 в противном случае. Для переменных  $s_k$  будем использовать также обозначение  $s_k = s_{i_k j_k}$ . Общее количество выбранных базовых линий должно быть равно в точности  $n - 1$ . В графе  $G = (E, V)$  не должно оставаться изолированных вершин. Для того, чтобы в дальнейшем рассматривать задачи выпуклой оптимизации, используем линейную релаксацию – заменим бинарные условия  $s_k \in \{0, 1\}$  на выпуклые  $s_k \in [0, 1]$ . В итоге ограничения на значения переменных могут быть сформулированы ограничения в следующем виде:

$$(2) \quad \forall k = 1, \dots, m \quad s_k \in [0, 1], \quad \sum_{k=1}^m s_k = n - 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \sum_{j=1, j \neq i}^n s_{ij} \geq 1.$$

Если дополнительно потребовать, чтобы граф был остовным деревом, то в случае  $s_k \in \{0, 1\}$  необходимо добавить одно из следующих условий:

$$(3) \quad \forall \tilde{V} \subset V, \tilde{V} \neq \emptyset \quad \sum_{A_i \in \tilde{V}, A_j \notin \tilde{V}} s_{ij} \geq 1;$$

$$(4) \quad \forall \tilde{V} \subset V, \tilde{V} \neq \emptyset \quad \sum_{A_i \in \tilde{V}, A_j \in \tilde{V}} s_{ij} \leq |\tilde{V}| - 1.$$

Рассмотрим следующие формулировки задачи выбора оптимального подграфа  $G \subset \bar{G}$  ( $E \subset \bar{E}$ ).

**Задача 1.**

$$\lambda_{\min}(Y \text{diag}(s_1, \dots, s_m) Y^T) \rightarrow \max$$

при ограничениях (2) (а также (3), (4) в случае поиска остовного дерева).

Задача эквивалентна задаче полуопределенного программирования

$$t \rightarrow \max$$

при ограничениях задачи 1 и  $Y \text{diag}(s_1, \dots, s_m) Y^T - tI \succeq 0$ . Здесь символ  $\succeq$  означает неотрицательную полуопределенность симметричной матрицы.

**Задача 2.**

$$\kappa(Y \text{diag}(s_1, \dots, s_m) Y^T) \rightarrow \min$$

при ограничениях (2) (а также (3), (4) в случае поиска остовного дерева).

Здесь  $\kappa(A)$  означает число обусловленности матрицы  $A$ , определенное с помощью евклидовой нормы, причем для произвольной симметричной положительно определенной матрицы  $A$  верно, что  $\kappa(A) = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A) \geq 1$ . В общем случае задача минимизации собственного значения невыпуклая. Но для задач рассматриваемого типа существует итерационный метод решения с заданной точностью (см. [4, 5]). Сначала выбираются конечные границы для  $\underline{\kappa} \leq \kappa \leq \bar{\kappa}$ . На каждой итерации решается задача

$$\lambda_{\max}(Y \text{diag}(s_1, \dots, s_m) Y^T) - v \lambda_{\min}(Y \text{diag}(s_1, \dots, s_m) Y^T) \rightarrow \min$$

при требуемых ограничениях,  $v = (\bar{\kappa} + \underline{\kappa})/2$ . Если оптимальное значение критерия положительное, то обновляем нижнюю границу, полагая  $\underline{\kappa} = v$ , в противном случае – верхнюю, полагая  $\bar{\kappa} = v$ . В качестве начального приближения  $\bar{\kappa}$  можно использовать значение числа обусловленности для матрицы  $(Y \text{diag}(s_1, \dots, s_m) Y^T)$ , которая получается в решении задачи 1.

Поскольку из-за использования релаксации бинарного условия получаются значения  $s_k \in [0, 1]$ , то их можно использовать в качестве весов  $w_k$  (например,  $w_k = 1 - s_k$  или  $w_k = 1/(s_k + 0.25)^2$ ) для алгоритма построения остовного дерева с минимальной суммой весов, например, для алгоритма Прима, изложенного в работе [6]. В случае, если ищется не обязательно остовное дерево, то результат можно получить как решение соответствующей задачи целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{k=1}^m w_k s_k \rightarrow \min$$

при ограничениях (2) и  $s_k \in \{0, 1\} \forall k = 1, \dots, m$ .

## 4. Вычислительные эксперименты и заключение

Точное решение задачи 2 (без использования линейной релаксации, при  $s_k \in \{0, 1\}$ ) возможно, но предполагает перебор вариантов. При этом за приемлемое время

ее можно решить только для определенного небольшого числа антенн (зависящего от характеристик вычислительного устройства). Так, например, для  $n = 8$  необходимо рассматривать уже 1184040 всевозможных конфигураций (без учета изолированности вершин), а общее число остовных деревьев в этом случае 262144. Это обстоятельство обуславливает необходимость использования методов оценки оптимальной конфигурации базовых линий, отличных от перебора.

Для экспериментальной оценки предложенного метода (задача 2) было сгенерировано 1000 различных тестов для случаев  $n = 4$  и  $n = 5$ . Число итераций алгоритма было равно 5, в качестве начального приближения использовалось решение задачи 1. Для решения задач полуопределенного программирования использовался алгоритм SCS, описанный в [7]. Проводилось сравнение с точным решением, полученным путем перебора. Результаты представлены в таблице 1. Под  $\kappa_{\text{opt}}$  подразумевается число обусловленности матрицы для точного решения,  $\kappa_{\text{approx}}$  – для приближенного.

Таблица 1. Результаты теста

n	поиск остовного дерева		поиск графа (общий вид)	
	% совпадений	$\max(\kappa_{\text{approx}}/\kappa_{\text{opt}})$	% совпадений	$\max(\kappa_{\text{approx}}/\kappa_{\text{opt}})$
4	92,4	6,92	92,5	3,59
5	65,8	3,21	61	3,95

Видно, что есть определенный процент совпадения с точным решением для приведенных значений  $n$ , при этом даже в случае неточного решения число обусловленности матрицы получается примерно того же порядка, что и в точном решении (существенным было бы отличие числа обусловленности на несколько порядков).

Предложенный метод может быть использован для оценки оптимального выбора базовых линий при определении ориентации твердого тела с помощью методов GNSS навигации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-08-00531а).

## Список литературы

1. Cohen C.E. Attitude Determination // Global Positioning System: Theory and Applications. Volume 2. / Edited by B. W. Parkinson and J. J. Spilker. Vol. 164. Progress in Astronautics and Aeronautics. Reston, VA: AIAA, 1994.
2. Wahba G. A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude // SIAM Review. 1965. Vol. 7, No. 3. P. 409-409.
3. Leick A., Rapoport L., Tatarnikov D. GPS Satellite Surveying. Wiley & Sons. 2015. 840 p.
4. Chen X., Womersley R.S., Ye J.J. Minimizing the condition number of a Gram matrix // SIAM Journal on Optimization. 2011. Vol. 21, No. 1. P. 127-148.
5. Lu Z., Pong T.K. Minimizing condition number via convex programming // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2011. Vol. 32, No. 4. P. 1193-1211.
6. Prim R.C. Shortest connection networks and some generalizations // Bell system technical journal. 1957. Vol. 3, No. 6. P. 1389-1401.
7. O'Donoghue B. et al. Conic optimization via operator splitting and homogeneous self-dual embedding // Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. Vol. 169, No. 3. P. 1042-1068.