

АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ–РАВЕНСТВ

Б.И. Адамов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Россия, 111250, Москва, Красноказаменная ул., 14

E-mail: adamoff.b@yandex.ru

Ключевые слова: адаптивная идентификация параметров, оптимальная идентификация, нелинейные ограничения, линейная параметрическая модель, метод наименьших квадратов, неголономная система.

Аннотация: Доклад посвящен решению задачи адаптивной идентификации параметров объекта, удовлетворяющих нелинейным уравнениям связей. Построены алгоритмы рекуррентной оперативной (*on-line*) параметрической идентификации по методу наименьших квадратов с учетом указанных ограничений на оценки параметров. Представление уравнений связей в дифференциальной форме позволило привлечь для решения задачи некоторые методы неголономной механики: описание движения системы в псевдоскоростях, использование принципа наименьшего приращения Гаусса.

1. Введение

Оперативная идентификация параметров детерминированных систем используются для построения адаптивных алгоритмов управления и позволяют в режиме реального времени получать оценки параметров в меняющихся условиях функционирования системы. Широко распространены методы идентификации с линейной параметрической (идентификационной) моделью исследуемой системы [5–7]. Достоинствами таких алгоритмов являются, в частности, их относительно простая структура. К недостаткам можно отнести иногда возникающую необходимость дополнительного преобразования входных и выходных сигналов для построения параметрической модели.

Настоящий доклад посвящен решению задачи адаптивной идентификации системы с линейной параметрической моделью при условии, что текущие оценки удовлетворяют ограничениям в виде равенств — параметрическим связям.

В [8] приводятся примеры прикладных задач, в которых возникает необходимость оценивания при наличии ограничений; проведен подробный обзор публикаций на указанную тему; а также приводится систематизированная сводка различных алгоритмов получения оценок параметров, удовлетворяющих линейным или нелиней-

ным ограничениям в виде равенств или неравенств. В [8] рассматриваются: методы понижения размерности (редукции) фильтра Калмана, псевдоизмерений, «мягких» связей, проекции оценок и проекции матрицы усиления фильтра Калмана.

Рассмотрим первый из них подробнее. Метод понижения размерности состоит в переходе к таким новым переменным, что часть из них тождественно обращается в ноль в силу уравнений связи, а остальные оцениваются. Аналогичный метод используется в [4] для случая нелинейных уравнений ограничений. Такой подход аналогичен описанию динамики механических систем с неголономными связями в псевдоскоростях [3].

2. Постановка задачи

Пусть линейная параметрическая модель исследуемой динамической системы имеет вид

$$(1) \quad y(t) = N^T(t) \vartheta,$$

$l \times 1$ $s \times 1$

где y — l -мерный выходной вектор параметрической модели; N — сигнальная или регрессионная матрица; $t \geq 0$ — непрерывное время; T — символ транспонирования; ϑ — s -мерный вектор неизвестных постоянных параметров, удовлетворяющих независимым уравнениям связей $\psi(\vartheta) = 0$. Здесь ψ — r -мерная ($r+l < s$) гладкая векторная функция связи.

Требуется разработать алгоритм идентификации параметров модели (1) с ограничениями на вектор оценок параметров $\hat{\vartheta}$ в виде равенств $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$ — параметрическими связями.

Представление уравнений связей в дифференциальной форме

$$(2) \quad D_{\psi}^T(\hat{\vartheta}) \dot{\hat{\vartheta}} = 0, \quad \psi(\hat{\vartheta})|_{t=0} = 0,$$

где D_{ψ}^T — матрица Якоби функции связи ψ , позволяет применить для поставленной задачи синтеза аппарат неголономной механики. Для того, чтобы вектор $\hat{\vartheta}$ удовлетворял соотношению (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$(3) \quad \dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta}) \cdot \dot{\hat{\pi}},$$

где $\dot{\hat{\pi}}$ — вспомогательный $(s-r)$ -мерный вектор с независимыми элементами, а матрица C такова, что $D_{\psi}^T C = 0$. По аналогии с неголономной механикой, будем называть $\dot{\hat{\pi}}$ вектором параметрических псевдоскоростей [3].

Таким образом, задача синтеза алгоритма идентификации со связями (2) сведена к построению вектора псевдоскоростей $\dot{\hat{\pi}}$, а вычисление вектора оценок искомых параметров $\hat{\vartheta}$ — к решению уравнения (3).

Отметим, что использование интегрируемых псевдоскоростей, таких что $\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi})$, уменьшает размерность рассматриваемой задачи, поскольку для ее решения потребуется только алгоритм расчета $\dot{\hat{\pi}}$.

3. Пример системы с параметрической связью

Ставится задача идентификации частоты ω установившихся колебаний, описываемых функцией

$$Y(t) = b_0 + b_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t + b_2 \cos 2\omega t + d_2 \sin 2\omega t,$$

где b_k и d_k , $k = \overline{0, 2}$ — неизвестные постоянные коэффициенты.

Поставленная задача сводится к идентификации параметров динамического объекта пятого порядка $Y^{(5)}(t) + 5\omega^2 \ddot{Y}(t) + 4\omega^4 \dot{Y}(t) = 0$.

Построим параметрическую модель этого объекта в форме $y = N^T \vartheta + \varepsilon$, не содержащей производных $Y(t)$ по времени. Здесь:

$$y = Y - a_{f4} \overset{(4)}{\mu} - a_{f2} \ddot{\mu} - a_{f0} \mu, \quad N = \begin{pmatrix} \ddot{\mu} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix}, \quad \vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{f3} - 5\omega^2 \\ a_{f1} - 4\omega^4 \end{pmatrix};$$

функции $\mu(t)$ и $\varepsilon(t)$ удовлетворяют асимптотически устойчивым дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами a_{fi} :

$$\overset{(5)}{\mu} + a_{f4} \overset{(4)}{\mu} + a_{f3} \ddot{\mu} + a_{f2} \ddot{\mu} + a_{f1} \dot{\mu} + a_{f0} \mu = Y, \quad \overset{(5)}{\varepsilon} + a_{f4} \overset{(4)}{\varepsilon} + \dots + a_{f0} \varepsilon = 0.$$

Экспоненциально затухающей величиной ε пренебрегаем.

Оцениваемые коэффициенты ϑ_1 и ϑ_2 удовлетворяют уравнению связи

$$(4) \quad \psi(\vartheta) = 25(\vartheta_2 - a_{f1}) + 4(\vartheta_2 - a_{f3})^2 = 0.$$

Выполнение условия $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$ позволяет однозначно вычислить оценку частоты $\hat{\omega}$ по оценкам $\hat{\vartheta}_1$ и $\hat{\vartheta}_2$.

В [1] построены градиентные алгоритмы идентификации частоты сигнала $Y(t)$, учитывающие параметрическую связь. Показано, что учет ограничения (4) приводит к скорению сходимости и повышению точности оценок.

4. Алгоритмы идентификации со связями

Построим оценки параметров, удовлетворяющих связям (2), по методу наименьших квадратов (МНК), т.е. из условия минимума функционала

$$(5) \quad J = \frac{1}{2} \int_0^t \left\| y(\tau) - N^T(\tau) \hat{\vartheta}(t) \right\|^2 d\tau + \frac{1}{2} \left\| \hat{\vartheta}(t) - \vartheta_0 \right\|_{M_0}^2.$$

Здесь ϑ_0 — постоянный вектор, $\psi(\vartheta_0) = 0$; $M_0 = M_0^T > 0$ — постоянная симметричная положительно определенная матрица; $\|\dots\|^2$ — квадрат евклидовой нормы, а $\|\dots\|_{M_0}^2 = (\dots)^T M_0 (\dots)$ — квадрат взвешенной евклидовой нормы.

4.1. Оптимальный алгоритм

Для построения оптимального алгоритма продифференцируем по времени условие стационарности функции Лагранжа $J_\lambda = J + \psi^T \lambda = J + \sum_i \lambda_i \psi_i$. Здесь λ — r -мерный вектор неопределенных множителей.

Алгоритм, полученный из необходимых условий минимума функционала J в силу связей (2), имеет вид:

$$(6) \quad \dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}, \quad \dot{\hat{\pi}} = M_{LSM}^{-1}C^T N e, \quad \hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0,$$

$$(7) \quad \dot{M} = N N^T, \quad M(0) = M_0,$$

$$(8) \quad \dot{\lambda} = B^T \cdot \left(E - M_\lambda C [C^T M_\lambda C]^{-1} C^T \right) N e, \quad \lambda(0) = 0,$$

где $e = y - N^T \hat{\vartheta}$ — вектор ошибок прогноза; $M_{LSM} = C^T M_\lambda C$ — спроецированная матрица Гессе функции Лагранжа J_λ ; $M_\lambda = M + \sum_i \lambda_i G_i$; G_i — матрица Гессе i -й скалярной функции связи $\psi_i(\hat{\vartheta})$; B — такая $(s \times r)$ -матрица, что $B^T D_\psi = E$. Из-за того, что точки условного и безусловного экстремумов J при $t = 0$ совпадают, здесь используется начальное условие $\lambda(0) = 0$.

Вместе с условием положительной определенности M_{LSM} , уравнения (6)–(8) представляют собой необходимые и достаточные условия строго локального минимума J .

Следует отметить, что $\hat{\vartheta} = \vartheta$ также является точкой безусловного и условного экстремумов и в ней $\lambda = 0$. Однако из-за аддитивных погрешностей параметрической модели (1), при $\hat{\vartheta} \rightarrow \vartheta$ множители λ_i могут не затухать до нуля. Также погрешности модели (1) способны так повлиять на поведение λ , что произойдет вырождение M_λ и алгоритм (6)–(8) потеряет работоспособность.

Для парирования этих двух эффектов проведем регуляризацию [2,6,7] уравнения для вектора λ :

$$(9) \quad \dot{\lambda} = A_\lambda \lambda + B^T \cdot \left(E - M_\lambda C [C^T M_\lambda C]^{-1} C^T \right) N e,$$

где A_λ — постоянная гурвицева матрица с «малыми» элементами.

Отметим в завершение, что в размерность системы (6)–(8) не зависит от числа связей r , т.е. их учет не снижает вычислительную сложность алгоритма МНК.

4.2. Субоптимальный алгоритм

Для получения оценок параметров, удовлетворяющих связям (2) преобразуем алгоритм МНК

$$(10) \quad \dot{\hat{\vartheta}} = M^{-1} N e, \quad \dot{M} = N N^T, \quad \hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0, \quad M(0) = M_0,$$

полученный из условия минимума функционала (5) без учета ограничений (2).

Оценки параметров построим из условия минимума меры принуждения

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2} \left\| \dot{\hat{\vartheta}} - M^{-1} N e \right\|_M^2$$

по независимым линейным комбинациям компонент вектора $\dot{\hat{\vartheta}}$, удовлетворяющего (2). Здесь \mathcal{Z} является аналогом принуждения по Гауссу [3], а алгоритм (10) — аналогом уравнений движения, освобожденного от связей.

Из условия $(\partial \mathcal{Z} / \partial \dot{\hat{\pi}}) = 0$ следует алгоритм МНК с проекцией:

$$(11) \quad \dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}, \quad \dot{\hat{\pi}} = [C^T M C]^{-1} C^T N e.$$

Отсутствие необходимости вычисления неопределенных множителей в алгоритме с проекцией, делает размерность его уравнений меньше, чем у (6)–(8) или (10), а также устраняет один из источников вычислительной неустойчивости.

4.3. О параметрической сходимости полученных алгоритмов

Исследуем сходимость оценок параметров, вырабатываемых в соответствии с алгоритмами (6)–(8) и (11) в малой окрестности точки $\hat{\vartheta} = \vartheta$, считая условия связей линейными. В этом случае уравнения для обоих методов совпадут, а вектор ошибок оценок $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta}$ может быть представлен в виде $\tilde{\vartheta} = C_* \tilde{\pi}$, где $C_* = C(\vartheta)$, а вспомогательный вектор $\tilde{\pi}$ удовлетворяет системе

$$(12) \quad \dot{\tilde{\pi}} = - [C_*^T M C_*]^{-1} C_*^T N N^T C_* \tilde{\pi}, \quad \dot{M} = N N^T.$$

Решение уравнения ошибки (12) имеет вид:

$$(13) \quad \tilde{\pi}(t) = [C_*^T M(t) C_*]^{-1} C_*^T M(0) C_* \tilde{\pi}(0).$$

Для затухания ошибки $\tilde{\pi}$, а, следовательно и $\tilde{\vartheta} = C_* \tilde{\pi}$, достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $C_*^T M(t) C_*$ неограниченно возрастали при $t \rightarrow \infty$ [7].

5. Заключение

В настоящей работе построен оптимальный по МНК идентификатор параметров системы с линейной параметрической моделью при наличии ограничений-равенств на искомые величины. Предложен оптимальный алгоритм идентификации с регуляризацией уравнения для неопределенных множителей, позволяющей парировать негативное влияние аддитивных погрешностей параметрической модели на оценки параметров. С помощью принципа наименьшего принуждения получен субоптимальный по МНК алгоритм, отличающийся от оптимального меньшей размерностью уравнений и лучшей вычислительной устойчивостью. При этом в малой окрестности точных значений параметров динамика оценок, вырабатываемых обоими идентификаторами, одинакова. Получены условия параметрической сходимости для построенных алгоритмов в малом.

Список литературы

1. Адамов Б.И. Идентификация параметров динамического объекта при наличии параметрических связей // Навигация и управление движением. Материалы XVII конференции молодых ученых. Санкт-Петербург, 17-20 марта 2015 г. СПб.: Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор» 2015. С. 497-508.
2. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Адаптивное управление летательным аппаратом с идентификацией на скользящих режимах // Управление большими системами. 2009. № 26. С. 113–144.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 592 С.
4. Calzolari G., Fiorentini G. Constrained Indirect Estimation // The Review of Economic Studies. 2004. Vol. 71, No. 4. P. 945–973.
5. Ioannou P.A., Sun J. Robust Adaptive Control. Mineola, New York: Courier Corporation, 2012. 821 p.
6. Sastry S., Bodson M. Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness. Mineola, New York: Courier Corporation, 2011. 381 p.
7. Slotine J.J.E., Li W. Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991. 461 pp.
8. Simon D. Kalman Filtering with State Constraints: A Survey of Linear and Nonlinear Algorithms // IET Control Theory & Applications. 2010. Vol. 4, No. 8. P. 1303–1318.