УДК 517.938

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И СБАЛАНСИРОВАННАЯ РЕДУКЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ КАНОНИЗАЦИИ МАТРИЦЫ ГАНКЕЛЯ

В.Г. Волков
Научно-технический центр ПАО «КАМАЗ»
Россия, 423800, Набережные Челны, Транспортный проезд, 70
E-mail: volkovvg@kamaz.ru

Д.Н. Демьянов
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Россия, 420008, Казань, Кремлевская ул., 18
E-mail: demyanovdn@mail.ru

Ключевые слова: идентификация, минимальная реализация, сбалансированная редукция, матрица Ганкеля, QR-разложение, LQ-разложение, канонизация матриц.

Аннотация: Рассматривается проблема идентификации и минимальной реализации дискретной линейной динамической системы по ее импульсной характеристике. Предлагается модификация алгоритма сбалансированной редукции, использующая канонизацию матрицы Ганкеля для идентификации системы и аппроксимации ее грамианов управляемости и наблюдаемости. Обсуждается взаимосвязь предлагаемого модифицированного алгоритма с известными методами сбалансированной редукции и минимальной реализации, основанными на вычислении грамианов динамической системы или сингулярного разложения матрицы Ганкеля. Предлагаемый алгоритм идентификации и сбалансированной редукции реализован в виде функции на языке программирования MATLAB и может использоваться для решения прикладных задач.

1. Введение

В настоящее время проблема идентификации и минимальной реализации моделей динамических систем в пространстве состояний по известным входным и выходным данным представляет существенный практический интерес [1-3]. С одной стороны, снижение стоимости и повышение качества вычислительной техники и измерительного оборудования позволяет рассматривать задачи анализа (например, снижение вибронагруженности конструкций и т. п.) и управления (например, управление турбулентными потоками, распространением эпидемий и др.) системами очень большой размерности [4-6]. С другой стороны, многие эффективные методы современной теории управления (например, оптимальное, робастное и предиктивное управление) предполагают наличие известной модели в пространстве состояний [7].

Одной из наиболее важных работ, посвященных решению задачи минимальной реализации, является работа Б. Мура [8], в которой им был предложен метод сбалансированной редукции модели, основанный на одновременной диагонализации грамианов управляемости и наблюдаемости с помощью невырожденного преобразования вектора состояния динамической системы. Различные модификации алгоритма сбалансированной редукции были предложены, например, в [9-12]. Другими важными работами в этой области являются работы [4] и [13] в которых предлагаются алгоритмы идентификации и минимальной реализации (ERA, BPOD), основанные на сингулярном разложении матрицы Ганкеля. Более того, в работе [5] была проиллюстрирована связь между ERA и BPOD. Также было показано (см., например, [4, 5, 13]), что ERA и BPOD способны эффективно решать задачи очень больших размерностей. Однако следует отметить, что алгоритмы вычисления грамианов, необходимых для применения сбалансированной редукции, или сингулярного разложения матрицы Ганкеля большой размерности, необходимого для применения ERA и BPOD, являются достаточно сложными с вычислительной точки зрения.

В работах [14–16] В. Н. Буковым и др. был разработан метод канонизации матриц, позволяющий строить полный класс решений любых СЛАУ, в том числе переопределенных, недоопределенных и вырожденных. Такой подход позволяет осуществлять анализ фундаментальных подпространств матрицы Ганкеля, не прибегая к ее сингулярному разложению. Кроме того, получаемые на основе канонизации матрицы позволяют аппроксимировать матрицы и грамианы управляемости и наблюдаемости.

Таким образом, целью данной работы является разработка алгоритма идентификации и сбалансированной редукции модели динамической системы на основе канонизации матрицы Ганкеля.

2. Используемые методы

2.1. Постановка задачи

Пусть рассматривается линейная дискретная динамическая система, представимая следующей моделью в пространстве состояний

$$(1)\qquad \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \\ y_k = Cx_k. \end{cases}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ – векторы состояния, управления и измерения, соответственно. Матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ суть неизвестные матрицы. Предполагается, что пара (A, B) управляема, а (A, C) наблюдаема по Калману.

Используя известную импульсную характеристику системы (1), необходимо построить для ее описания приближенную редуцированную модель вида

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi_{k+1} = \hat{A}\xi_k + \hat{B}u_k, \\ v_k = \hat{C}\xi_k, \end{cases}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^r$, $v \in \mathbb{R}^p$ – векторы состояния и измерения, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{r\times m}$ и $\hat{C} \in \mathbb{R}^{p\times r}$ – матрицы, подлежащие определению, а $r < n$ – порядок редуцированной модели.

По аналогии с работой [1] будем считать, что редуцированная модель (2) должна сохранять основные свойства системы (1), например, устойчивость, управляемость и т. п., а также иметь малые погрешности моделирования, т.е. $\|y - v\|$ должна быть мала.

2.2. Метод канонизации матриц

Метод канонизации, предложенный и подробно описанный в работах [15, 16] предназначен для решения широкого класса линейных матричных уравнений. Он заключается в сопоставлении с матрицей $M_{m\times n}$ в общем случае пятерки матриц

$$\left(\overline{M}^L_{(m-r)\times m} \quad \overline{M}^R_{n\times(n-r)} \quad \widetilde{M}^L_{r\times m} \quad \widetilde{M}^R_{n\times r} \quad \widetilde{M}_{n\times m}\right). \tag{3}$$

Здесь обозначение $M_{m\times n}$ показывает, что $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Матрицы $\overline{M}^L_{(m-r)\times m}$ и $\widetilde{M}^L_{r\times m}$ называют левыми, а $\overline{M}^R_{n\times(n-r)}$ и $\widetilde{M}^R_{n\times r}$ – правыми делителями нуля и канонизаторами, соответственно; r – ранг матрицы $M_{m\times n}$. Матрицу $\widetilde{M}_{n\times m} = \widetilde{M}^R_{n\times r} \times \widetilde{M}^L_{r\times m}$ называют сводным канонизатором.

Известные, например из [16], свойства канонизации (3) позволяют записать следующее равенство

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M}^L_{r\times m} \\ \overline{M}^L_{(m-r)\times m} \end{bmatrix} M_{m\times n} \begin{bmatrix} \widetilde{M}^R_{n\times r} & \overline{M}^R_{n\times(n-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Здесь $I_{r\times r}$ – единичная матрица размера $r\times r$, а $O_{(m-r)\times n}$, $O_{m\times(n-r)}$ и $O_{(m-r)\times(n-r)}$ – нулевые матрицы соответствующих размеров.

2.3. Алгоритмы ERA и BPOD

Известные из работ [4, 5, 13] алгоритмы ERA и BPOD предназначены для идентификации и редукции моделей в пространстве состояний на основе сингулярного разложения матрицы Ганкеля. Известно, что матрицу Ганкеля можно легко построить на основе импульсной характеристики системы (1).

Предполагается, что грамианы управляемости $W_{\mathcal{C}}$ и наблюдаемости $W_{\mathcal{O}}$ могут быть представлены следующим образом

$$W_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*, W_{\mathcal{O}} = \mathcal{O}^*\mathcal{O}, \tag{5}$$

где $\mathcal{C}$ – матрица управляемости, $\mathcal{O}$ – матрица наблюдаемости системы (1). При этом вместо прямого анализа грамианов (5) анализируются матрицы Ганкеля H и H', которые можно разложить в произведения матриц наблюдаемости и управляемости

$$H = \mathcal{O}\mathcal{C}, H' = \mathcal{O}A\mathcal{C}. \tag{6}$$

На основе сингулярного разложения матрицы $H = U\Sigma V^*$ вычисляются матрицы редуцированной системы по следующим формулам

$$\begin{aligned} &\hat{A} = \Sigma^{-1/2}U^*H'V\Sigma^{-1/2}, \\ &\hat{B} = \Sigma^{1/2}V^*\begin{bmatrix} I_{m\times m} \\ O_{(r-m)\times m}\end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} I_{p\times p} & O_{p\times(r-p)}\end{bmatrix}U\Sigma^{1/2} \end{aligned} \tag{7}$$

3. Метод идентификации и редукции модели

3.1. Аппроксимация матриц и грамианов управляемости и наблюдаемости

Заметим, что первое уравнение в (6) представляет собой билинейное уравнение относительно неизвестных матриц наблюдаемости $\mathcal{O}$ и управляемости $\mathcal{C}$. Для его решения воспользуемся результатом, представленным в работе [14]. Учитывая, что ранг матрицы H, сформированной на основе импульсной характеристики может оказаться много меньше ее размерности, возьмем лишь столбцы и строки матриц $\mathcal{O}$ и $\mathcal{C}$, формирующие линейно-независимые столбцы и строки матрицы H, получим

(8) $$\mathcal{O} = H\widetilde{H}^R, \mathcal{C} = \widetilde{H}^L H, \hat{\mathcal{O}} = H\widetilde{H}^R T, \hat{\mathcal{C}} = T^{-1}\widetilde{H}^L H.$$

Здесь $\hat{\mathcal{O}}$ – матрица наблюдаемости, а $\hat{\mathcal{C}}$ – матрица управляемости редуцированной системы (2), T – произвольная невырожденная матрица. Полученный таким образом ранг матрицы H можно считать первым приближением порядка системы (1).

Теорема 1. *Редуцированная модель (2) может быть определена из следующих соотношений*

(9) $$\begin{gathered}\hat{A} = T^{-1}\widetilde{H}^L H'\widetilde{H}^R T,\\ \hat{B} = T^{-1}\widetilde{H}^L H \begin{bmatrix} I_{m\times m} \\ O_{(r-m)\times m}\end{bmatrix}, \hat{C} = [I_{p\times p} \quad O_{p\times(r-p)}]H\widetilde{H}^R T.\end{gathered}$$

Доказательство. Используя свойства канонизаторов (4), второе уравнение из (6) и решение билинейного уравнения (8), получим первое выражение из (9). Используя известные соотношения, связывающие матрицы $\mathcal{O}$ и $\mathcal{C}$ с матрицами B и C, получим второе и третье выражения из (9).

3.2. Сбалансированная редукция

Для определения произвольной матрицы T подставим в выражения (5) решения (8) первого уравнения из (6), получим

(10) $$\widehat{W}_{\mathcal{C}} = T^{-1}\widetilde{H}^L H\left(\widetilde{H}^L H\right)^* T^{-*}, \widehat{W}_{\mathcal{O}} = T^*\left(H\widetilde{H}^R\right)^* H\widetilde{H}^R T.$$

Здесь $\widehat{W}_{\mathcal{C}}$ – грамиан управляемости, $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$ – грамиан наблюдаемости редуцированной системы (2), T^* – эрмитово сопряженная к матрице T, T^{-*} – эрмитово сопряженная к обратной матрице T^{-1}. Исходя из роли матрицы T в выражениях для грамианов (10), ясно, что она определяет невырожденное преобразование $x_k = Tz_k$ вектора состояния системы (1). На основе вышесказанного сформулируем следующие теоремы

Лемма 1. *Грамианы управляемости и наблюдаемости исходной системы (1) могут быть оценены на основе канонизации (3) по следующим формулам*

(11) $$W_{\mathcal{C}} = \widetilde{H}^L H\left(\widetilde{H}^L H\right)^*, W_{\mathcal{O}} = \left(H\widetilde{H}^R\right)^* H\widetilde{H}^R.$$

Теорема 2. *Грамианы управляемости и наблюдаемости системы* (2)*, аппроксимированные выражениями (10), диагональны и равны, т.е.* $\widehat{W}_{\mathcal{C}} = \widehat{W}_{\mathcal{O}} = \Sigma$*, если и только если матрица T удовлетворяет уравнению*

(12) $$\widetilde{H}^L H\left(\widetilde{H}^L H\right)^*\left(H\widetilde{H}^R\right)^* H\widetilde{H}^R T = T\Sigma^2,$$

где матрица Σ *является диагональной.*

Доказательства леммы 1 и теоремы 2 напрямую следуют из соотношений (5) – (10).

Теорема 2 показывает, что для вычисления матрицы T можно воспользоваться методом сбалансированной редукции, разработанным Б. Муром в [8]. Выбирая лишь первые r столбцов матрицы T, соответствующие наиболее управляемым и наблюдаемым направлениям в пространстве состояний, получим редуцированную модель (2).

Решение уравнения (12) эквивалентно решению задачи вычисления собственных векторов и собственных чисел матрицы $\widetilde{H}^L H\left(\widetilde{H}^L H\right)^*\left(H\widetilde{H}^R\right)^* H\widetilde{H}^R$, которую можно эффективно решать с помощью пакетов прикладных программ. Кроме того, для решения задачи канонизации (3) матрицы Ганкеля также существуют эффективные алгоритмы, основанные на LU-, QR-, LQ- или сингулярном разложениях.

Более того, канонизаторы, вычисленные на основе QR-, LQ- и сингулярного разложений, обладают особыми свойствами. Так, например, при канонизации матрицы H с помощью LQ-разложения ее правый канонизатор $\widetilde{H}^R$ и произведение $\widetilde{H}^L H$ оказываются унитарными, что позволяет упростить выражения (11) – (12), получив соответственно, $W_{\mathcal{C}} = I$ и $\widehat{W}_{\mathcal{C}} \widehat{W}_{\mathcal{O}} = \left(H\widetilde{H}^R\right)^* H\widetilde{H}^R T = T\Sigma^2$. Аналогичные упрощения могут быть получены и для случая канонизации методом QR-разложения. В случае канонизации методом сингулярного разложения сразу получаем $\widehat{W}_{\mathcal{C}} = \widehat{W}_{\mathcal{O}} = \Sigma$ и $T = I$, что в точности совпадает с результатами, получаемыми с помощью ERA и BPOD.

Таким образом, алгоритм построения редуцированной модели (2) предполагает следующие шаги.

1) Сформировать матрицы Ганкеля H и H' (6) на основе импульсной характеристики исходной системы.
2) Канонизировать матрицу Ганкеля H и вычислить матрицы $\mathcal{O}$ и $\mathcal{C}$.
3) При необходимости решить задачу сбалансированной редукции (12).
4) Вычислить матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ по формулам (9).

Конец алгоритма.

4. Заключение

В работе предложен новый алгоритм идентификации модели в пространстве состояний по известной импульсной характеристике динамической системы. Показано, что на основе канонизации матрицы Ганкеля можно получить аппроксимацию матриц и грамианов управляемости и наблюдаемости для последующей сбалансированной редукции. Проиллюстрирована связь предлагаемого модифицированного алгоритма с существующими эффективным алгоритмами идентификации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-08-00516).

Список литературы

1. Gugercin S., Antoulas A. C. A survey of model reduction by balanced truncation and some new results // International Journal of Control. 2004. Vol. 77, No. 8. P. 748-766.
2. Kim J., Bewley T. R. A linear systems approach to flow control // Annu. Rev. Fluid Mech. 2007. Vol. 39. P. 383-417.
3. Van Overschee P., De Moor B. L. Subspace identification for linear systems: Theory, Implementation, Applications. Springer Science & Business Media, 2012.
4. Juang J. N., Pappa R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction // Journal of guidance, control, and dynamics. 1985. Vol. 8, No. 5. P. 620-627.
5. Rowley C. W. Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, No. 3. P. 997-1013.
6. Ma Z., Ahuja S., Rowley C. W. Reduced-order models for control of fluids using the eigensystem realization algorithm // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2011. Vol. 25, No. 1-4. P. 233-247.
7. Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P. P., Francis B. A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. Vol. 34, No. 8. P. 831-847.
8. Moore B. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction // IEEE Transactions on Automatic Control. 1981. Vol. 26, No. 1. P. 17-32.
9. Kürschner P. Balanced truncation model order reduction in limited time intervals for large systems // Advances in Computational Mathematics. 2018. P. 1-24.
10. Нечепуренко Ю. М. Эрмитовое спектральное псевдообращение и его приложения //Математические заметки. 2014. Т. 96, № 1. С. 101-115.

11. Stykel T. Balanced truncation model reduction for semidiscretized Stokes equation // Linear Algebra and its Applications. 2006. Vol. 415, No. 2-3. P. 262-289.
12. Heinkenschloss M., Sorensen D. C., Sun K. Balanced truncation model reduction for a class of descriptor systems with application to the Oseen equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 2008. Vol. 30, No. 2. P. 1038-1063.
13. Willcox K., Peraire J. Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition // AIAA journal. 2002. Vol. 40, No. 11. P. 2323-2330.
14. Буков В. Н., Рябченко В. Н., Зыбин Е. Ю. Решение билинейных матричных уравнений методом канонизации // Вестник Киевского университета. Сер. Физико-математические науки. 2003. № 2. С. 14-23.
15. Буков В. Н., Рябченко В. Н., Косьянчук В. В., Зыбин Е. Ю. Решение линейных матричных уравнений методом канонизации // Вестник Киевского университета. Серия: Физико-математические науки, 2002. № 1. С. 19-28.
16. Буков В. Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд. науч. лит. Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.