

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТОТЫ СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА

**В.Т. Ле**

*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики*  
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49  
E-mail: [visaosang89@gmail.com](mailto:visaosang89@gmail.com)

**А.А. Бобцов**

*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики*  
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49  
E-mail: [bobtsov@mail.ru](mailto:bobtsov@mail.ru)

**Ключевые слова:** идентификация, синусоидальные сигналы, нестационарная частота, линейная регрессионная модель.

**Аннотация:** Рассмотрена задача идентификации линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала, имеющего неизвестные амплитуду и фазу. Существующие методы синтеза алгоритмов идентификации линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала используют неограниченные функции времени, что является не привлекательным с технической точки зрения, поскольку шум в измерениях умноженные на неограниченную функцию могут дать крайне плохие оценки настраиваемого параметра. В данной работе предлагается новый подход идентификации линейно меняющейся частоты, предусматривающий итеративную фильтрацию (с использованием линейных устойчивых звеньев первого порядка) измеряемого синусоидального сигнала, которая, в свою очередь, позволяет получить простую линейную регрессионную модель с одним неизвестным постоянным параметром. В работе приведены результаты компьютерного моделирования, иллюстрирующие работоспособность предлагаемого алгоритма идентификации.

## 1. Введение. Математическая постановка задачи

Данная работа является развитием результата, опубликованного в [1]. В [1] была рассмотрена задача идентификации линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала, имеющего в том числе, неизвестные амплитуду и фазу. Было показано, что постановка задачи синтеза алгоритма идентификации линейно меняющейся частоты является актуальной для ряда технических приложений и возникает, например, задачах компенсации возмущений при управлении телескопом (см., например, [2-4]). В отличие от [1], в данной работе для идентификации частоты не предполагается использование регрессионной модели, содержащей неограниченные функции времени, что является более привлекательным с технической точки зрения.

Как и в работе [1] рассмотрим сигнал вида

$$(1) \quad y(t) = A \sin\left(\frac{\omega t^2}{2} + \varphi\right),$$

где  $A$ ,  $\omega$  и  $\varphi$  – неизвестные числа.

Ставится задача синтеза алгоритма идентификации неизвестной частоты  $\omega$ , обеспечивающего выполнение условия

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega} = 0,$$

где  $\tilde{\omega} = \hat{\omega} - \omega$ .

В работе [1] для модели синусоидального сигнала вида (1) была произведена параметризация в виде

$$(3) \quad py(t) = (2p^2 + p)\xi_1 + \theta(\xi_2 + p\xi_3),$$

где  $p = \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования,  $\xi_1(t) = \frac{1}{(p+1)^2} y(t)$ ,

$$\xi_2(t) = \frac{1}{(p+1)^2} \eta(t)y(t), \quad \xi_3(t) = \frac{1}{(p+1)^2} \eta^2(t)y(t), \quad \eta(t) = t \text{ и } \theta = -\omega^2.$$

Техническая реализация сигналов  $\xi_2(t) = \frac{1}{(p+1)^2} \eta(t)y(t)$  и  $\xi_3(t) = \frac{1}{(p+1)^2} \eta^2(t)y(t)$

может оказаться проблематичной, поскольку в случае использования чистого интегрирования сигналы  $\xi_2(t)$  и  $\xi_3(t)$  чувствительны к шумам. Для разъяснения последнего рассмотрим реализацию функции  $\eta(t)$

$$(4) \quad \dot{q} = 1 + \varepsilon(t),$$

где  $\varepsilon(t)$  – некоторый неучтенный сигнал, например, представляющий собой шум.

После интегрирования (4) имеем

$$q(t) = t + \int_0^t \varepsilon(s) ds,$$

откуда легко видеть, что функция  $q(t)$  отличается от искомой функции  $\eta(t)$  на величину  $\int_0^t \varepsilon(s) ds$ , которая в свою очередь, при  $\varepsilon = const$  имеет неограниченный рост во времени. Аналогичная и более реалистичная проблема может возникать в случае, когда в измерениях сигнала  $y(t)$  содержится шум, то есть доступен не  $y(t)$ , а сигнал

$$(5) \quad y_1(t) = y(t) + \varepsilon(t).$$

В этом случае для сигналов  $\xi_2(t)$  и  $\xi_3(t)$  имеем

$$\xi_2(t) = \frac{1}{(p+1)^2} \eta(t)y(t) + \frac{1}{(p+1)^2} \eta(t)\varepsilon(t),$$

$$\xi_3(t) = \frac{1}{(p+1)^2} \eta^2(t)y(t) + \frac{1}{(p+1)^2} \eta^2(t)\varepsilon(t).$$

Из приведенных уравнений легко видеть, что в случае (5) для некоторых ошибок оценивания параметра  $\theta$  с использованием алгоритма (12), (13) из [1] может существенно отличаться от истинного значения.

В данной работе предлагается новый алгоритм идентификации параметра  $\theta = -\omega^2$ , не содержащий в своей структуре элементов  $\eta(t)$  и  $\eta^2(t)$ . Данный алгоритм базируется на недавних результатах [5,6], позволяющих синтезировать алгоритмы идентификации нестационарных параметров для линейных регрессионных моделей.

## 2. Основной результат

Рассмотрим уравнение (3). Последовательно используя соотношение  $\frac{\alpha}{p+\alpha} \chi_1 \chi_2 = \chi_1 \frac{\alpha}{p+\alpha} \chi_2 - \frac{1}{p+\alpha} \left( \dot{\chi}_1 \frac{\alpha}{p+\alpha} \chi_2 \right)$  (см., например, [7]), для  $\xi_2$  и  $\dot{\xi}_3$  имеем

$$(6) \quad \xi_2 = \frac{1}{p+1} \frac{1}{p+1} ty = \frac{1}{p+1} \left[ t \frac{1}{p+1} y \right] - \frac{1}{(p+1)^3} y = t \frac{1}{(p+1)^2} y - \frac{2}{(p+1)^3} y,$$

$$(7) \quad \dot{\xi}_3 = \frac{1}{p+1} \frac{1}{p+1} t^2 y = t^2 \frac{1}{(p+1)^2} y - t \frac{4}{(p+1)^3} y + \frac{6}{(p+1)^4} y.$$

Откуда для  $\dot{\xi}_3$  получаем

$$(8) \quad \dot{\xi}_3 = 2t \frac{1}{(p+1)^2} y + t^2 \frac{p}{(p+1)^2} y - \frac{4}{(p+1)^3} y - t \frac{4p}{(p+1)^3} y + \frac{6p}{(p+1)^4} y.$$

Подставляя (6) и (8) в уравнение (3), имеем

$$(9) \quad \begin{aligned} py &= (2p^2 + p)\xi_1 + \theta \left( t \frac{1}{(p+1)^2} y - \frac{2}{(p+1)^3} y + \right. \\ &+ \left. 2t \frac{1}{(p+1)^2} y + t^2 \frac{p}{(p+1)^2} y - \frac{4}{(p+1)^3} y - t \frac{4p}{(p+1)^3} y + \frac{6p}{(p+1)^4} y \right) = \\ &= g_1 + \theta t^2 \phi_{11} + \theta t \phi_{12} + \theta \phi_{13}, \end{aligned}$$

где  $g_1 = \frac{2p^2 + p}{(p+1)^2} y$ ,  $\phi_{11} = \frac{p}{(p+1)^2} y$ ,  $\phi_{12} = \frac{3}{(p+1)^2} y - \frac{4p}{(p+1)^3} y$ ,  
 $\phi_{13} = -\frac{6}{(p+1)^3} y + \frac{6p}{(p+1)^4} y$ .

Используя оператор  $\frac{\alpha_1}{p+\alpha_1}$  для уравнения (9), получаем

$$(10) \quad \begin{aligned} z_1 &= \frac{p\alpha_1}{p+\alpha_1} y - \frac{\alpha_1}{p+\alpha_1} g_1 = \theta \frac{\alpha_1}{p+\alpha_1} t^2 \phi_{11} + \theta \frac{\alpha_1}{p+\alpha_1} t \phi_{12} + \theta \frac{\alpha_1}{p+\alpha_1} \phi_{13} = \\ &= \theta t^2 \phi_{21} + \theta t \phi_{22} + \theta \phi_{23}, \end{aligned}$$

где  $z_1 = \frac{p\alpha_1}{p+\alpha_1} y - \frac{\alpha_1}{p+\alpha_1} g_1$ ,  $\phi_{21} = \frac{\alpha_1}{p+\alpha_1} \phi_{11}$ ,  $\phi_{22} = -\frac{2\alpha_1}{(p+\alpha_1)^2} \phi_{11} + \frac{\alpha_1}{p+\alpha_1} \phi_{12}$ ,

$$\phi_{23} = \frac{2\alpha_1}{(p+\alpha_1)^3} \phi_{11} - \frac{\alpha_1}{(p+\alpha_1)^2} \phi_{12} + \frac{\alpha_1}{p+\alpha_1} \phi_{13}.$$

Умножим, соответственно, уравнения (9) и (10) на  $\phi_{21}$ ,  $\phi_{11}$  и вычтем одно из одного

$$(11) \quad \dot{y} \phi_{21} - g_1 \phi_{21} - z_1 \phi_{11} = \theta t (\phi_{12} \phi_{21} - \phi_{22} \phi_{11}) + \theta (\phi_{13} \phi_{21} - \phi_{23} \phi_{11}) = \theta t \phi_{32} + \theta \phi_{33},$$

где  $\phi_{32} = \phi_{12} \phi_{21} - \phi_{22} \phi_{11}$  и  $\phi_{33} = \phi_{13} \phi_{21} - \phi_{23} \phi_{11}$ .

Используя оператор  $\frac{\alpha_2}{p+\alpha_2}$  для уравнения (11), имеем

$$(12) \quad z_2 = \theta \frac{\alpha_2}{p+\alpha_2} t \phi_{32} + \theta \frac{\alpha_2}{p+\alpha_2} \phi_{33} = \theta t \phi_{42} + \theta \phi_{43},$$

где  $z_2 = \frac{\alpha_2}{p + \alpha_2} (\dot{y}\phi_{21} - g_1\phi_{21} - z_1\phi_{11})$ ,  $\phi_{42} = \frac{\alpha_2}{p + \alpha_2} \phi_{32}$ ,  $\phi_{43} = -\frac{\alpha_2}{(p + \alpha_2)^2} \phi_{32} + \frac{\alpha_2}{p + \alpha_2} \phi_{33}$ .

Аналогично предыдущему действию, умножим уравнение (11) на  $\phi_{42}$ , а (12) на  $\phi_{32}$  и вычтем одно из другого, тогда

$$(13) \quad \dot{y}\phi_{21}\phi_{42} - g_1\phi_{21}\phi_{42} - z_1\phi_{11}\phi_{42} - z_2\phi_{32} = \theta(\phi_{33}\phi_{42} - \phi_{43}\phi_{32}) = \theta\phi_{53},$$

где  $\phi_{53} = \phi_{33}\phi_{42} - \phi_{43}\phi_{32}$ .

Поскольку уравнение (13) содержит не реализуемый член  $\dot{y}\phi_{21}\phi_{42}$ , то применим для него фильтр  $\frac{1}{p+1}$ , тогда

$$(14) \quad z_3 = \frac{1}{p+1} [\dot{y}\Phi] - \frac{1}{p+1} [g_1\phi_{21}\phi_{42} + z_1\phi_{11}\phi_{42} + z_2\phi_{32}] = \theta\Psi,$$

где  $\Phi = \phi_{21}\phi_{42}$ ,  $\Psi = \frac{1}{p+1} \phi_{53}$  и  $\frac{1}{p+1} [\dot{y}\Phi] = \Phi \frac{p}{p+1} y - \frac{1}{p+1} \left[ \dot{\Phi} \frac{p}{p+1} y \right]$ .

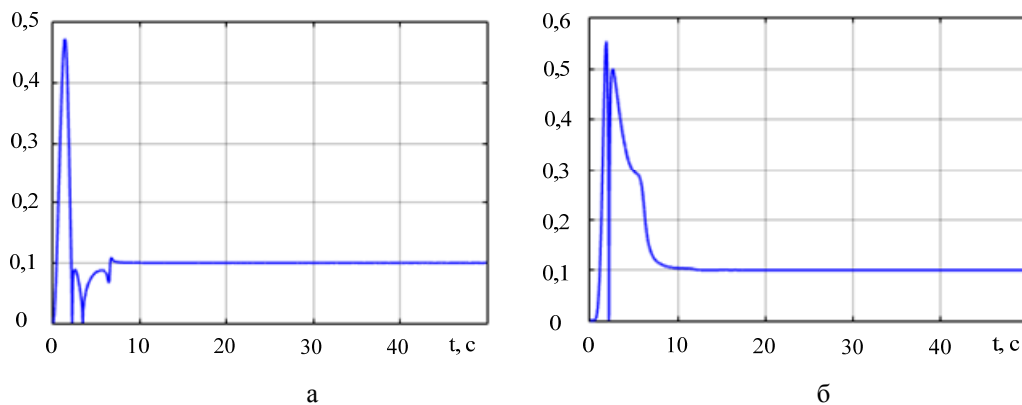
Таким образом, мы получим уравнение первого порядка, для которого можно использовать различные подходы оценивания параметра  $\theta$ . Воспользуемся алгоритмом аналогичным [8-10]

$$(15) \quad \dot{\hat{\theta}} = -\kappa\Psi^2\hat{\theta} + \kappa\Psi z_3,$$

где  $\kappa > 0$  любой коэффициент регулирования скорости сходимости.

### 3. Пример

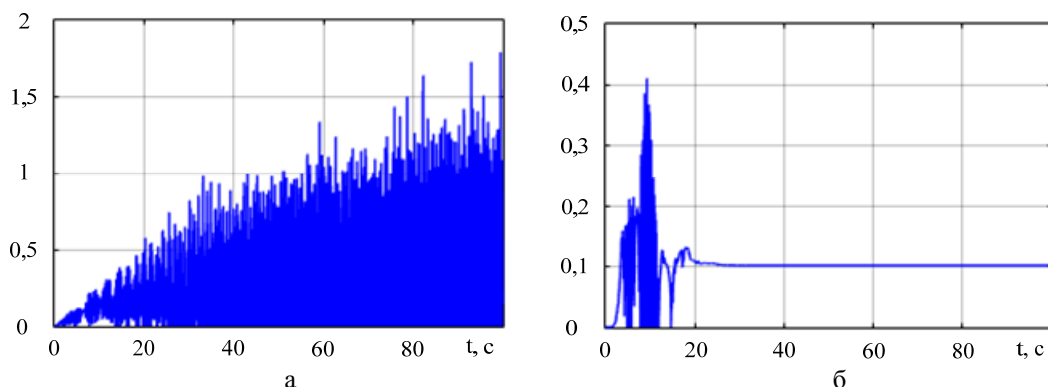
Сравним алгоритм идентификации (15) с (12), (13) опубликованным в [1].



**Рис. 1.** График переходных процессов переменной  $\hat{\theta}$  при отсутствии шума  $\varepsilon(t)$  и  $\omega = 0,1$ ,  $A = 2$ ,  $\varphi = -2$ : алгоритм (12), (13) из [1] при  $\kappa = 1$  (а); алгоритм (15) при  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$  и  $\kappa = 10000$  (б).

На рис. 1-а и 1-б, соответственно, представлены графики моделирования для алгоритма из [1] и (1)-(15). Легко видеть, что оба подхода обеспечивают выполнение условия (2). Теперь рассмотрим более реалистичную ситуацию, то есть случай, когда сигнал  $y(t)$  измеряется не точно (см., уравнение (5)). В качестве  $\varepsilon(t)$  выберем частотно ограниченный белый шум с мощностью  $N = 0,001$  и промоделируем оба подхода. Из графиков переходных, представленных на рис. 2 можно видеть, что алгоритм идентифика-

ции (12), (13) опубликованный в [1] дает результат по точности значительно хуже, чем (15).



**Рис. 2.** График переходных процессов переменной  $\hat{\omega}$  при наличии шума  $\varepsilon(t)$  и  $\omega = 0,1$ ,  $A = 2$ ,  $\varphi = -2$ : алгоритм (12), (13) из [1] при  $\kappa = 0,001$  (а); алгоритм (15) при  $\alpha_1 = 0,2$ ,  $\alpha_2 = 0,3$  и  $\kappa = 100$  (б).

## 4. Заключение

В данной работе предложено альтернативное к [1] решение задачи синтеза алгоритма идентификации линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала вида (1). Получен алгоритм идентификации (15), обеспечивающий выполнение целевого условия (2). Проведенное компьютерное моделирование наглядно иллюстрирует лучшее качество оценивания алгоритма (15) по сравнению с (12), (13) из статьи [1].

## Список литературы

1. Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А. Идентификация линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 1 (77). С. 28-32.
2. Васильев В.Н., Томасов В.С., Шаргородский В.Д., Садовников М.А. Состояние и перспективы развития прецизионных электроприводов комплексов высокоточных наблюдений // Изв. вузов. Приборостроение. 2008. № 6. С. 5-12.
3. Аракелян А.К., Афанасьев А.А. Вентильные электрические машины. М.: Энергоатомиздат, 1997. 236 с.
4. Erm T., Sandrock S. Adaptive correction of periodic errors improves telescope performance // Proceedings of the American Control Conference. 2005. Vol. 6. P. 3776–3777.
5. Ле В.Т., Бобцов А.А., Пыркин А.А. Новый алгоритм идентификации нестационарных параметров для линейной регрессионной модели // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17, № 5. С. 952-955.
6. Ван Ц., Ле В.Т., Пыркин А.А., Колюбин С.А., Бобцов А.А. Идентификация кусочно-линейных параметров регрессионных моделей нестационарных детерминированных систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 71-82.
7. Ioannou P.A., Sun J. Robust adaptive control. California: PTR Prentice-Hall, 1996.
8. Aranovskiy S., Bobtsov A., Kremlev A., Nikolaev N., Slita O. Identification of frequency of biased harmonic signal // European Journal of Control. 2010. Vol. 16, No. 2. P. 129-139.
9. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
10. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Vedyakov A.A., Kolyubin S.A. Estimation of polyharmonic signal parameters // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76, No. 8. P. 1400-1416.